SORTED BALANCE

INPUT: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{N}^{>0}$

$m \in \mathbb{N}^{>0}$

- Ordina $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ in modo che $t_0 \geq t_1 \geq \ldots \geq t_{n-1}$
- Procedi con GREEDY BALANCE

Teorema: SORTED BALANCE fornisce una $3/2$ - approssimazione.

Dim: Se $n \leq m$, l'algoritmo trova la soluzione ottima.
Quindi assumiamo $n > m$.

Osservazione 1: $L^* \geq 2 t_m$

Dim: $\underbrace{t_0 \geq t_1 \geq \ldots \geq t_{m-1} \geq t_m}_{\text{almeno due sono assegnati alla stessa macchina}} \geq t_{m+1} \ldots$

$L^* \geq 2 t_m$

Sia $\hat{\imath}$ la macchina t.c.

$$L_{\hat{\imath}} = L$$

(assumiamo che $\hat{\imath}$ abbia almeno due task)

Sia $\hat{j}$ l'ultimo task assegnato alla macchina $\hat{i}$.

$$\hat{j} \geq m$$

Quindi

$$t_{\hat{j}} \leq t_m \underset{\text{Oss. 1}}{\leq} \frac{1}{2} L^*.$$

Allora:

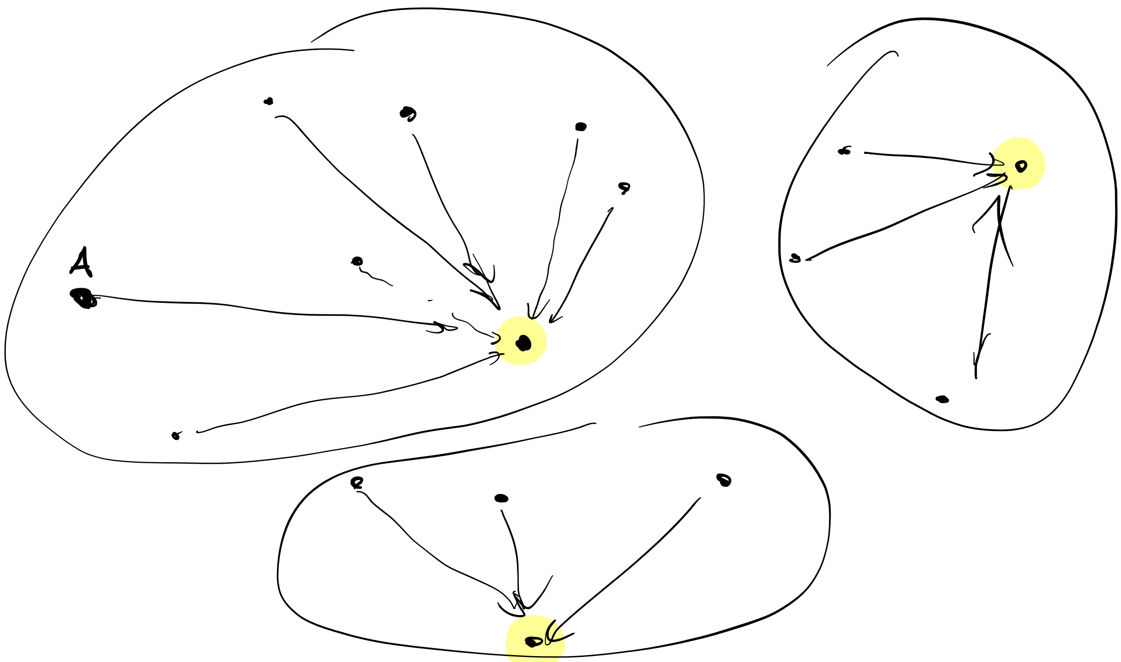
$$L = L_{\hat{i}} = \underbrace{(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}})}_{\leq L^*} + \underbrace{t_{\hat{j}}}_{\leq \frac{1}{2} L^*} \leq \frac{3}{2} L^*$$

$\square$

<u>NOTA 1</u>. In realtà l'algoritmo è $4/3$-approssimante.

<u>NOTA 2</u>: LOADBALANCING $\in$ PTAS

PROBLEMA DELLA SELEZIONE DEI CENTRI (CENTER SELECTION)



SPAZI METRICI

Ω $\qquad d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$

1) $d(x,y) \geq 0$

   e $d(x,y) = 0$ sse $x = y$

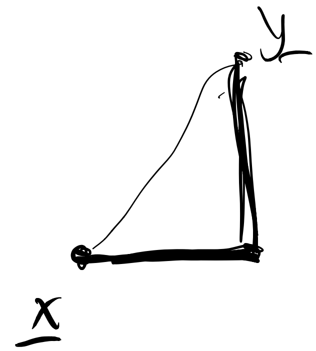
2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\Omega = \mathbb{R}^n$$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \| \underline{x} - \underline{y} \|$$

$$\|\underline{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$



CENTER SELECTION

INPUT:
- $S \subseteq \Omega$ dove (Ω, d) è uno spazio metrico
- $k \in \mathbb{N}^{>0}$

SOLUZIONE AMMISSIBILE:

$$C \subseteq S \qquad |C| \leq k$$

$$C: S \to C$$

$$s \mapsto \operatorname*{argmin}_{c \in C} d(s, c)$$

FUNZIONE OBIETTIVO:

$$\underbrace{\rho}_{\text{RAGGIO}}(C) = \max_{s \in S} d(s, C(s))$$

TIPO: MIN

ρ^*

CENTER SELECTION PLUS

INPUT:
$S \subseteq \Omega$
$k \in \mathbb{N}^{>0}$
$r \in \mathbb{R}^{>0}$

INVECE DI CANCELLARE SI PUÒ NON SCEGLIERE MAI UN $\bar{s}$ T.C. $d(\bar{s}, C) \leq 2r$

$C \leftarrow \emptyset$
while $S \neq \emptyset$ {
$\bar{s} \leftarrow$ qualunque elemento di S
$C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$
cancelliamo da S tutti i punti s t.c. $d(s, \bar{s}) \leq 2r$
}
if $|C| \leq k$
output C
else
output "IMPOSSIBILE"

Teorema: 1) Se CENTER SELECTION PLUS emette un output, quell'output è ammissibile e con rapporto di approssimazione $\leq \frac{2r}{\rho^*}$

2) Se $r \geq \rho^*$, l'algoritmo emette un output

3) Se emette "IMPOSSIBILE", allora $r < \rho^*$.

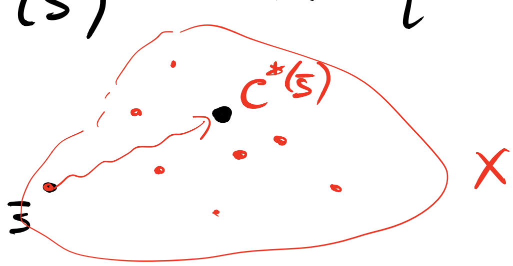
Dim: $\boxed{1}$ $\forall s \in S \Rightarrow s$ è stato cancellato subito dopo l'inserimento di un $\bar{s} \in C$ e

$$d(s, \bar{s}) \leq 2r$$

$$\Rightarrow \rho(C) \leq 2r \qquad \frac{\rho(C)}{\rho^*} \leq \frac{2r}{\rho^*}$$

$\boxed{2}$ $\bar{s}$ appena aggiunto

$C^*(\bar{s})$ $\qquad X = \{ s \in S \mid C^*(s) = C^*(\bar{s}) \}$



$\forall s \in X$

$$d(s, \bar{s}) \leq d(s, C^*(s)) + d(C^*(s), \bar{s}) =$$

||

$$= \underbrace{d(s, C^*(s))} + \underbrace{d(C^*(\bar{s}), \bar{s})} \leq$$

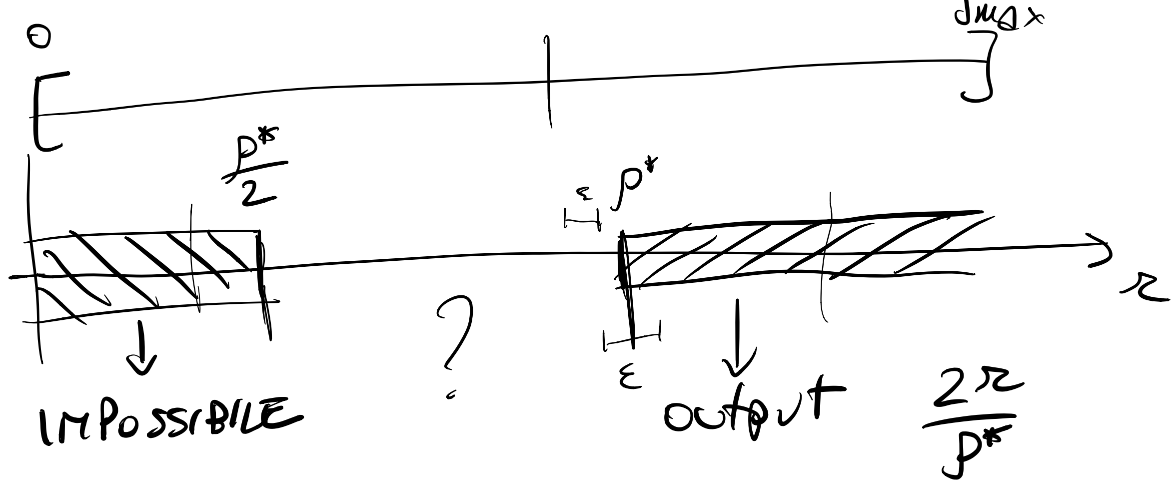
$$\leq \rho^* + \rho^* = 2\rho^* \leq 2r$$

$\Rightarrow$ Dopo aver inserito $\bar{S}$ tutti i punti in X vengono cancellati

$\Rightarrow$ Siccome $|C^*| \leq K$, dopo $\leq K$ iterazioni $S = \emptyset$.

$\boxed{3}$ Contronominale di (2). $\square$

$$A \Rightarrow B \qquad \neg B \Rightarrow \neg A$$



GREEDY CENTER SELECTION

INPUT: $S \subseteq \Omega$

$k \in \mathbb{N}^{>0}$

if $|S| \leq k$

output S

STOP

$s \leftarrow$ qualunque S

$C \leftarrow \{s\}$

while $|C| < k$

$\bar{s} \leftarrow \arg\max_{s \in S} d(s, C)$

$C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

output C

Teorema: GREEDY CENTER SELECTION è un algoritmo 2-approssimante per CENTER SELECTION.

Dim: Per assurdo.

Supponete che ci sia un input (S, k) per cui la soluzione prodotta C

ha $\rho(C) > 2\rho^*$.

Vuol dire che $\exists \hat{s} \in S$ t.c.

$d(\hat{s}, C) > 2\rho^*$.

Guardiamo le prime k

iterazioni:

$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \dots, \bar{s}_k$

$\longrightarrow \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \dots, \bar{C}_k$

insieme dei centri appena prima dell'aggiunta di $\bar{s}_i$

$$d(\bar{s}_i, \bar{C}_i) \geq d(\hat{s}, \bar{C}_i) \geq d(\hat{s}, C) > 2\rho^*$$

per massimizzazione

$\bar{C}_i \subseteq C$

$\Rightarrow$ Sono k iterazioni valide di CENTER SELECTION PLUS con $r = \rho^*$

$S \neq \emptyset \Rightarrow$ "IMPOSSIBILE"

$\Rightarrow r < \rho^*$: assurdo.

$\square$

Teorema: Se $P \neq NP$, non esiste un algoritmo polinomiale α-approssimante per CENTER SEL con $\alpha < 2$.

Dim:

DOMINATING SET

INPUT: $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}^{>0}$

OUTPUT: $\exists D \subseteq V$ t.c. $|D| \leq k$ t.c. $\forall x \in V \setminus D$ $\exists y \in D$ $xy \in E$