RANGO E SELEZIONE

Dato $\underline{b} \in 2^n$, definiamo

$$\mathrm{rank}_{\underline{b}}, \ \mathrm{select}_{\underline{b}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

① $\forall p \leq n$

$$\mathrm{rank}_{\underline{b}}(p) = |\{i \mid i < p \text{ e } b_i = 1\}|$$

② $\forall k \leq$ #uni in $\underline{b}$

$$\mathrm{select}_{\underline{b}}(k) = \max\{p \mid \mathrm{rank}_{\underline{b}}(p) \leq k\}$$

$n = 7$

	0	1	2	3	4	5	6
$\underline{b} =$	0	1	1	0	1	0	1

p	$\mathrm{rank}_{\underline{b}}(p)$
0	0
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4

quanti 1 ci sono fino a quella posiz. esclusa

$n \cdot \log n$

k	$\mathrm{select}_{\underline{b}}(k)$
0	1
1	2
2	4
3	6
4	7

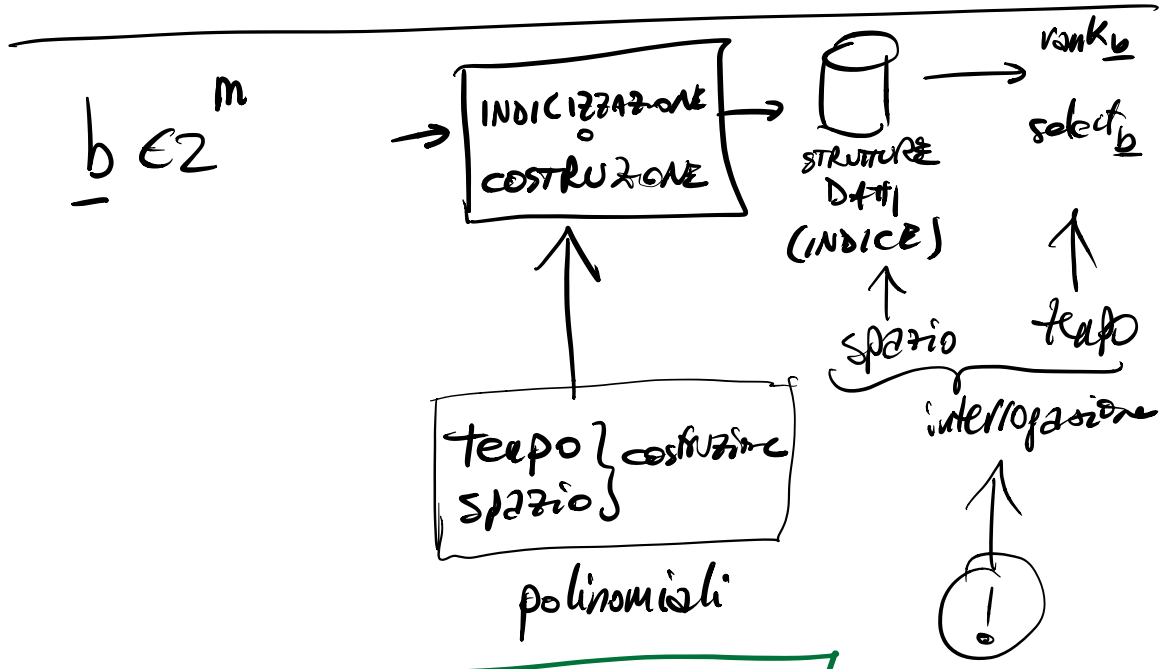
posiz. degli 1

lungh. vettore

$n \cdot \log n$

- $\forall k \quad rank_{\underline{b}}(select_{\underline{b}}(k)) = k$
- $\forall p \quad select_{\underline{b}}(rank_{\underline{b}}(p)) \geq p$

  Vale $=$ sse $b_p = 1$



IMPLEMENTAZIONE 1.0

- Memorizzare $\underline{b}$
- Spazio: n bit
- Tempo: $O(n)$ sia per rank che per select

SPAZIO = INF. TEOREMATICA LOWER BOUND

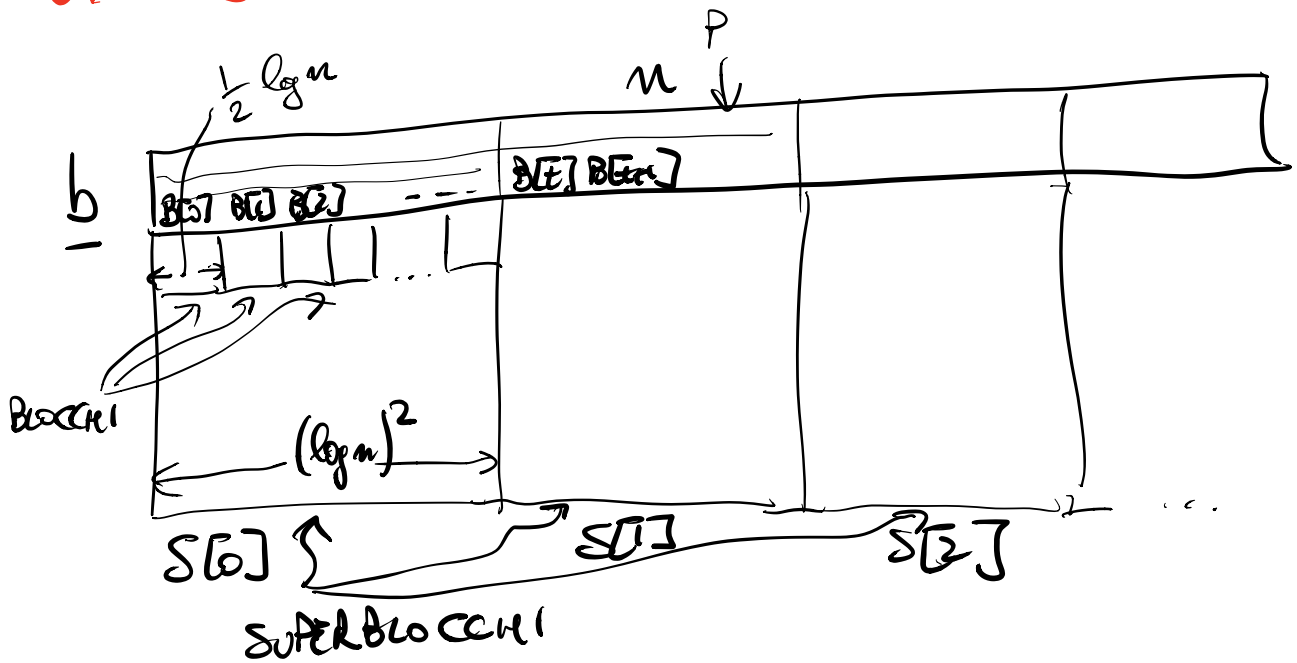
IMPLEMENTAZIONE 2.0

- Memorizzare le tabelle di rank e select
- Spazio: $2n \log n$ bit
- Tempo: $O(1)$

IMPLEMENTAZIONE SUCCINTA

- Spazio: $n + o(n)$
- Tempo: $O(1)$

STRUTTURA SUCCINTA DI JACOBSON PER IL RANGO



$n = 256$

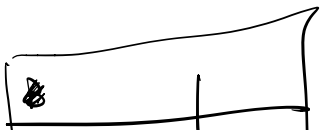
SUPERBL. = 64

BLOCCO = 4

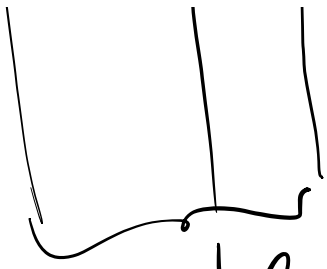
1001 0011

QUANTI TIPI DI BLOCCHI CI SONO?

$2^{\frac{1}{2}\log n}$ tipi di blocco



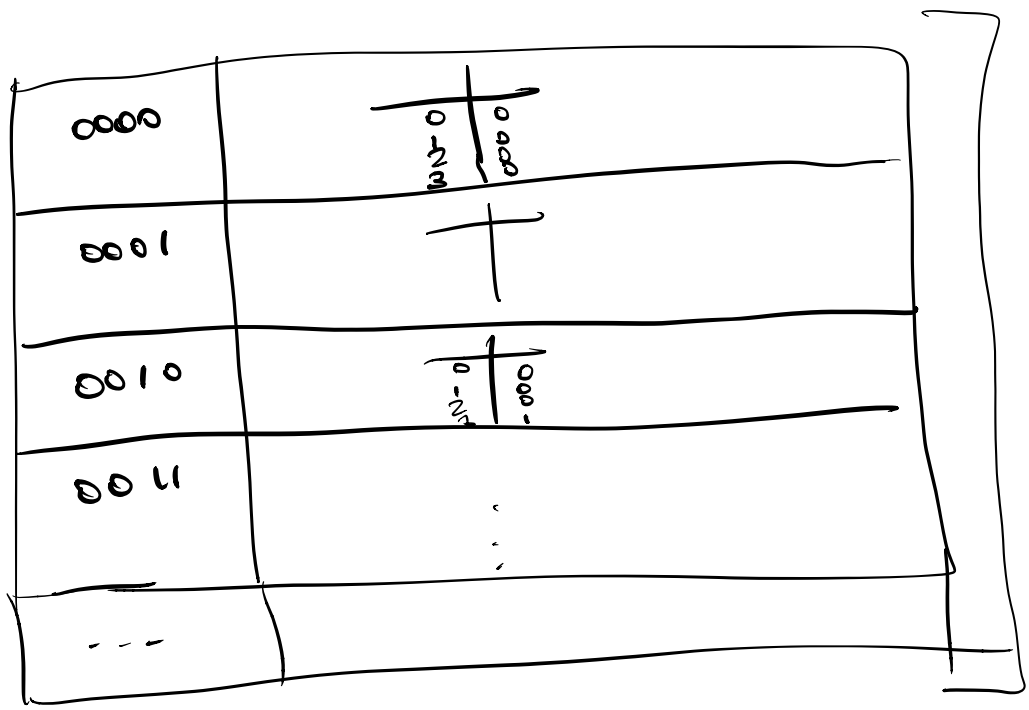
rank di un blocco



$\frac{1}{2}\log n \;\Big|\; \log\left(\frac{1}{2}\log n\right)$

$$2^{\frac{1}{2}\log n}\,\frac{1}{2}\log n \log\left(\frac{1}{2}\log n\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\,\frac{1}{2}\log n \log\log n = o(n)$$



1) Per ogni superblocco memorizzo gli 1 prima del superblocco

$\underbrace{S[-]}_{\text{tanti elementi quanti sono i superblocchi}}$

$S[i]$ = # uni prima dell'inizio del superblocco i

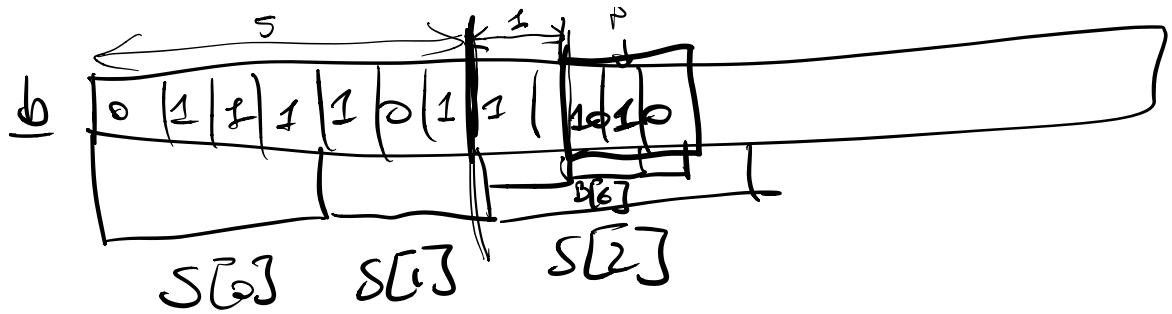
2) Per ogni blocco memorizzo il numero di 1 fra l'inizio del superblocco che lo contiene e l'inizio del blocco

$\underbrace{B[-]}_{\text{tanti elementi quanti sono i blocchi}}$

$B[i]$ = # uni fra l'inizio del superbl. e l'inizio del blocco

3) Tabella che memorizza esplicitamente il rank per ogni tipo di blocco [Four-Russians Trick]

TAB



$$\mathrm{rank}_{\underline{b}}(p) = S\left[\frac{p}{(\log n)^2}\right] + B\left[\frac{p}{\frac{1}{2}\log n}\right] + \underbrace{TAB_t\left[p \ \underline{\mathrm{mod}} \ \frac{1}{2}\log n\right]}$$

$$t = \underline{b}\left[\text{posizioni del blocco di appart. di } p\right]$$

$S[-]$

$$\underbrace{\frac{n}{(\log n)^2}}_{\text{n° superblocchi}} \cdot \log n = \frac{n}{\log n} = o(n)$$

$B[-]$

$$\frac{n}{\frac{1}{2}\log n} \log\left((\log n)^2\right) =$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{2}\lg n} 2 \lg \lg n =$$

$$= \frac{4n}{\lg n} \lg \lg n = o(n)$$

TAB

$$2^{\frac{1}{2}\lg n} \cdot \left(\frac{1}{2}\lg n\right) \lg\left(\frac{1}{2}\lg n\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\, \underbrace{\frac{1}{2} \lg n \lg \lg n}_{o(\sqrt{n})} = o(n)$$

Spazio : $n + o(n)$ ← SUCCINTA

Tempo : $O(1)$