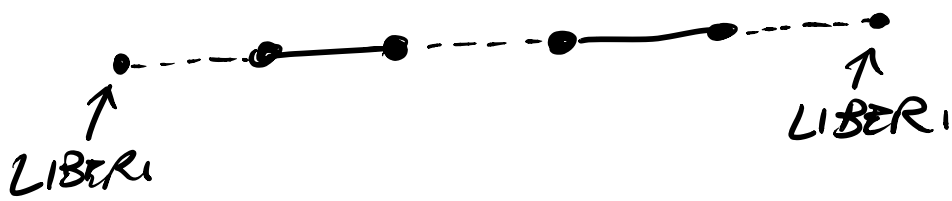
Teorema: $G=(V,E)$ $M \subseteq E$ matching

$\Updownarrow$ 1) $|M|$ è massima
2) non esiste un cammino aumentante



$M \leftarrow \emptyset$
forever {
$\pi =$ FIND AUGMENTING (M) $\leftarrow O(m)$
if $\pi = \perp$ **break**
use π to increment M
}

$$O\left(\frac{n}{2} m\right)$$

VISITE DI GRAFI

○ sconosciuti

F → ◍ conosciuti ma non visitati

● visitati

```
F ← ∅
S[x0] ← GRAY
• PUT(F, x0)
while F ≠ ∅ {
    x ← GET(F)
    S[x] ← BLACK   //visitato
    for y ∈ N(x) {
        if S[y] == WHITE {
            S[y] ← GRAY
            • PUT(F, y)
        }
    }
}
```

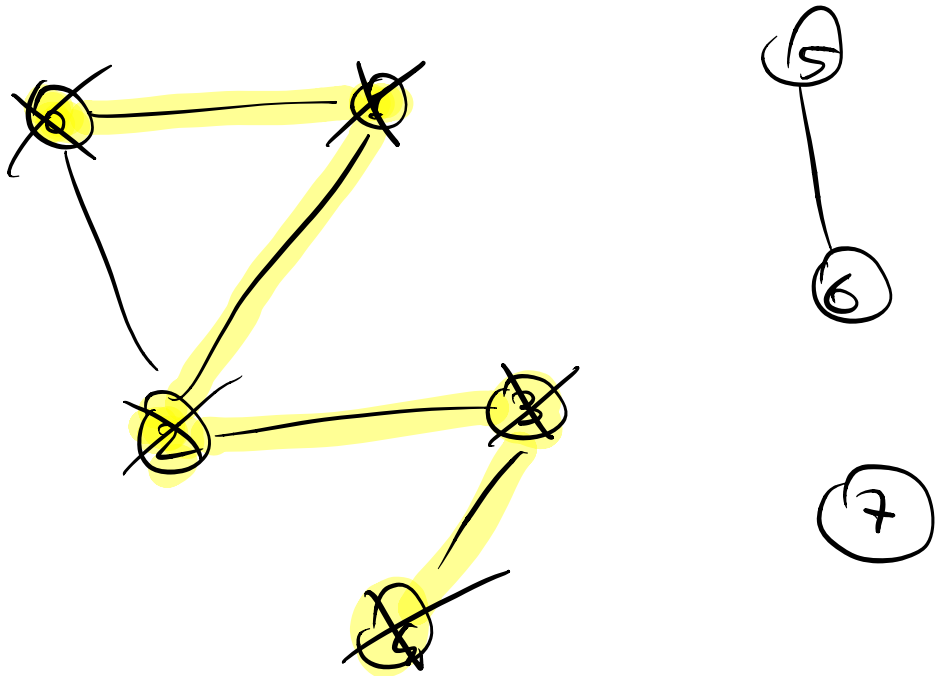
F STACK DFS

F CODA BFS

Teorema: In qualunque visita con radice x_0

1) alla fine, non ci sono nodi grigi
2) i nodi visitati sono tutti e soli quelli della componente di x_0
3) richiede $O(m)$
4) i lati di visita sono un albero di copertura (spanning tree) della componente di x_0

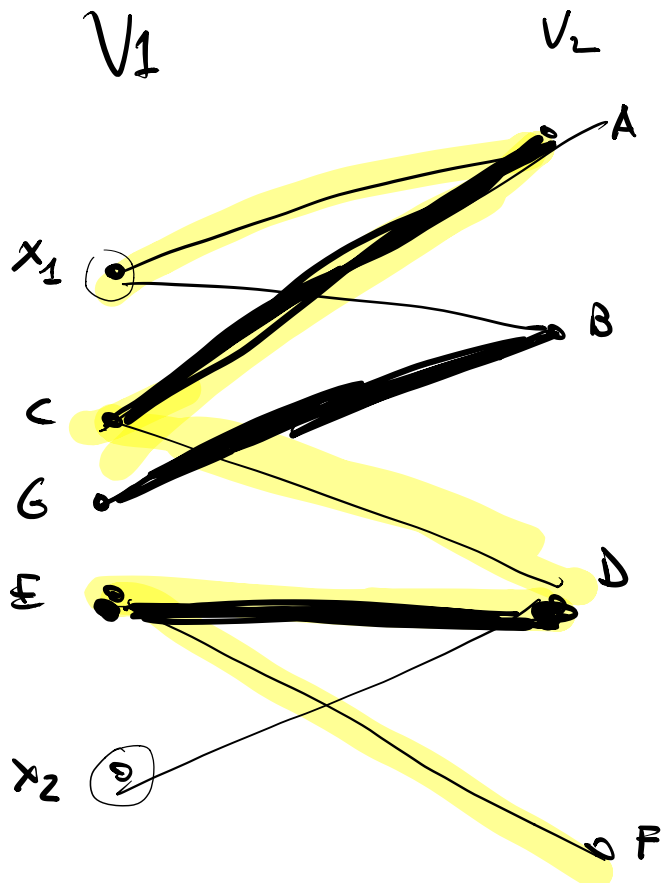
[albero = grafo connesso aciclico]
[di copertura = incide su tutti i vertici]



F

1
2
0
3
4

<u>Teorema</u>: In una visita BFS da x_0 i vertici vengono visitati in ordine crescente di distanza da x_0.

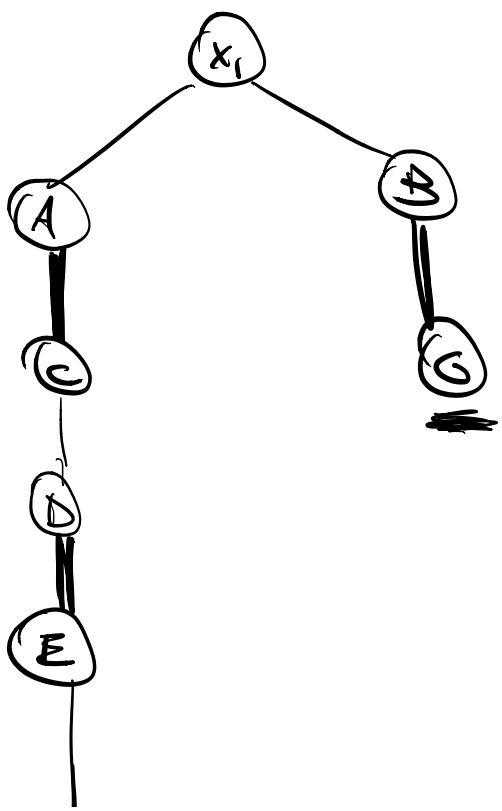


$V_1 \longrightarrow V_2$

$E \setminus M$

$V_1 \longleftarrow V_2$

M



1

F

PROBLEMA DI BILANCIAMENTO DEL CARICO (LOAD BALANCING)

<u>INPUT</u>: $t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{N}^{>0}$

$m \in \mathbb{N}^{>0}$ (n° di macchine)

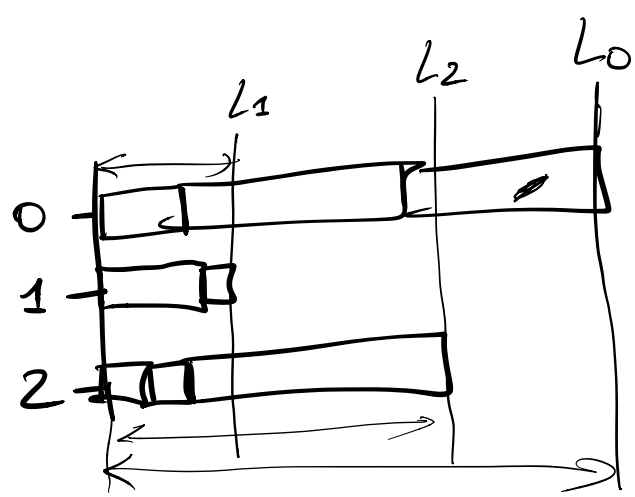
<u>SOL. AMMISSIBILI</u>:

$$\alpha : n \longrightarrow m$$

$$L_i \triangleq \sum_{j \in \alpha^{-1}(i)} t_j$$ carico della macchina i

$$\underset{\text{COSTO}}{L} = \max_{i \in m} L_i$$

<u>TIPO</u>: MIN



Teorema: LOAD BALANCING $\in$ NPO-completo

GREEDY BALANCE

$L_i \leftarrow 0 \quad \forall i \in M$

for $j = 0, \dots, m-1$ {

$\hat{i} \leftarrow \arg\min_i L_i$

$\alpha(j) = \hat{i}$

$L_{\hat{i}} \leftarrow L_{\hat{i}} + t_i$

}

$O(mn)$

Teorema: GREEDY BALANCE è un algoritmo 2-approssimante per LOAD BALANCING

Osservazione 1: $L^* \geq \frac{1}{m} \sum_{j \in n} t_j$

$L_0^*, L_1^*, \dots, L_{m-1}^*$

$$\sum_{i \in m} L_i^* = \sum_{j \in n} t_j$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in m} L_i^* = \frac{1}{m} \sum_{j \in n} t_j$$

$$\Rightarrow \exists i \quad L_i^* \geq \frac{1}{m} \sum_{j \in n} t_j$$

$$\Rightarrow L^* \geq \frac{1}{m} \sum_{j \in n} t_j$$

Osservazione 2: $L^* \geq \max_{j \in n} t_j$

Dim (Thm): L soluzione trovata da GREEDYBALANCE.

Sia $\hat{i}$ la macchina con

$$L_{\hat{i}} = L$$

Sia $\hat{j}$ l'ultimo task assegnato a $\hat{i}$.

$$L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} = L'_{\hat{i}}$$

CARICO CHE AVEVA $\hat{j}$ PRIMA CHE LE ASS. L'ULTIMO TASK

$$L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} \le L'_i \le L_i \quad \forall i$$

CARICO DELLA MACCHINA i NEL MOM. IN CUI È STATO AGGIUNTO $\hat{j}$

$$\boxed{L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} \le L_i \quad \forall i \in m}$$

SOMMO LE DISEQUAZIONI

$$m\left(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}}\right) \le \sum_{i \in m} L_i = \sum_{j \in m} t_j$$

DIVISO PER m

$$L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} \le \frac{1}{m} \sum_{j \in m} t_j \le L^*$$

OSS. 1

$$L = L_{\hat{i}} = \underbrace{\left(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}}\right)}_{\le L^*} + \underbrace{t_{\hat{j}}}_{\le L^*} \le 2L^*$$

OSS. 2

$$\frac{L}{L^*} \le 2 \qquad \square$$

Corollario: LOAD BALANCING $\in$ APX.

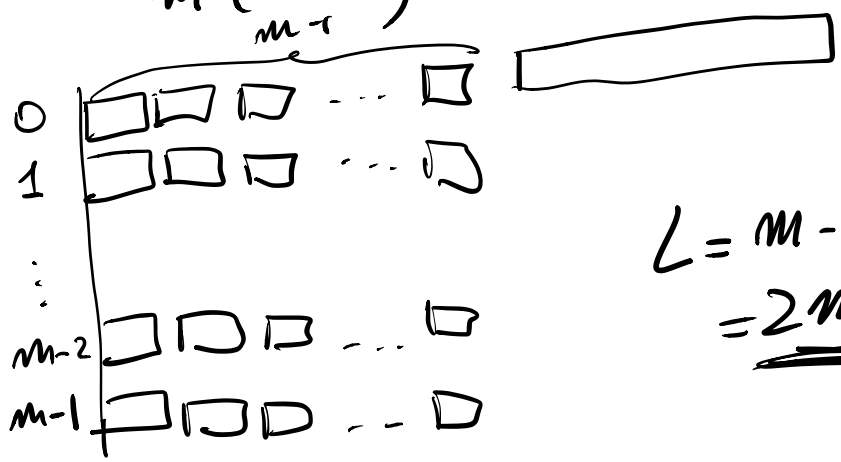
Teorema: $\forall \varepsilon > 0$ esiste un GREEDYBALANCE input su cui produce una soluzione L t.c.

$$2-\varepsilon \le \frac{L}{L^*} \le 2$$

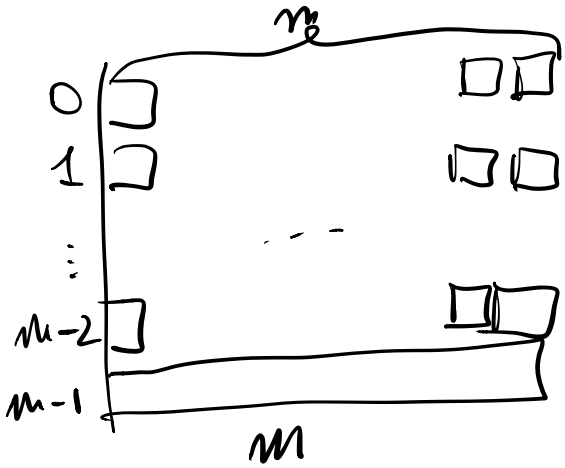
Dim:

$$m > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{MACCHINE}$$

$$n = m(m-1)+1$$



$$L = m-1+m = 2m-1$$



$$L^* = m$$

$$\frac{L}{L^*} = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m} \geq$$

$$\geq 2 - \varepsilon$$

$\square$