PROBLEMA $\quad$ MAX E$_k$SAT

$$\underbrace{\underbrace{(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4)}_{\text{clausola}} \wedge (x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)}_{t}$$

letterali

Teorema: MAX E$_k$SAT è NPO-completo per ogni $k \geq 3$.

Teorema (1) Un assegnamento casuale soddisfa in media

$$E[T] = \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

clausole.

- $x_1, \dots, x_n$: variabili che compaiono nella formula
- $c_1, \dots, c_t$: clausole

1) $X_i \sim \text{Unif}\{0,1\}$ (è il valore assegnato alla variabile x_i)

2) C_i

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{se } c_i \text{ è soddisfatta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3) T il numero di clausole soddisfatte

$$E[T] = \sum_{b_1 \in Z} \cdots \sum_{b_n \in Z} E[T \mid \underbrace{X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n}_{\mathcal{E}_i}] \, P[X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] =$$

Legge del valore atteso totale

$$E[X] = \sum_{i=1}^{k} E[X \mid \mathcal{E}_i] \, P[\mathcal{E}_i]$$

dove $\mathcal{E}_i$ sono eventi disgiunti la cui unione è l'universo

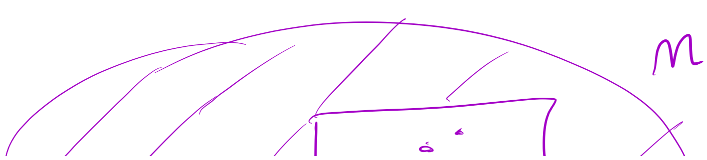
$$= \sum_{b_1 \in Z} \cdots \sum_{b_n \in Z} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \, \underbrace{P[X_1 = b_1]}_{\frac{1}{2}} \, P[X_2 = b_2] \cdots P[X_n = b_n] =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1 \in Z} \cdots \sum_{b_n \in Z} E[\underbrace{T}_{T = C_1 + \dots + C_t} \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] =$$

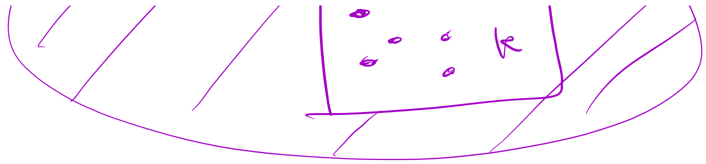
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{t} \left(\underbrace{\sum_{b_1 \in Z} \cdots \sum_{b_n \in Z}} E[C_j \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \right)$$

$b_1 = 0, \ b_2 = 1, \ b_3 = 1, \ b_4 = 0, \ b_5 = 1$

$C_j = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5$



2^n = # assegnam. possibili



2^{n-k} = rendono falsa la clausola

$\boxed{2^n - 2^{n-k}}$ = rendono vera la clausola

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{t} \left(2^n - 2^{n-k}\right) =$$

$$= \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n}\, t = \frac{2^k - 1}{2^k}\, t$$

Abbiamo dimostrato che

$$E[T] = \frac{2^k - 1}{2^k}\, t.$$

DERANDOMIZZAZIONE

Teorema (2): Per ogni $j = 0, \dots, n$ esistono $b_1, \dots, b_j \in 2$ t.c.

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j] \geq \frac{2^k - 1}{2^k}\, t$$

Dim: (Per induzione su j)

Il caso $j = 0$ è Teorema (1).

$$\frac{2^k - 1}{2^k}\, t \overset{\text{IP. IND.}}{\leq} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}] =$$

Legge del valore atteso totale

$$= E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 0]\, P[X_j = 0]$$
$$+ E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 1]\, P[X_j = 1] =$$
$$= \frac{1}{2} \overbrace{E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 0]}^{\alpha_0}$$
$$+ \frac{1}{2} \underbrace{E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 1]}_{\alpha_1} =$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1} \Rightarrow$$

α_0 o α_1 devono essere $\geq \frac{2^k-1}{2^k}t$

Per assurdo, supponiamo α_0 e $\alpha_1 < \frac{2^k-1}{2^k}t$

$$\Downarrow \; < \frac{1}{2}\,\frac{2^k-1}{2^k}t + \frac{1}{2}\,\frac{2^k-1}{2^k}t = \frac{2^k-1}{2^k}t \qquad \square$$

Corollario:

Esistono $b_1, \dots, b_n \in Z$ t.c.

$$\underbrace{E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]}_{\#\text{clausole soddisfatte se } X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n} \geq \frac{2^k-1}{2^k}t$$

ALGORITMO DERANDOMIZZATO

$D \leftarrow \emptyset$ // Indici delle clausole già determinate

for $i = 1, \dots, n$
  $\Delta_0 \leftarrow 0$ $\Delta D_0 \leftarrow \emptyset$
  $\Delta_1 \leftarrow 0$ $\Delta D_1 \leftarrow \emptyset$
  for $j = 1, \dots, t$
    if $j \in D$ **continue**
    if x_i non compare in c_j **continue**
    $h \leftarrow$ numero di variabili di indice $\geq i$ che compaiono in c_j
    if x_i compare positiva in c_j
      $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 - \frac{1}{2^h}$
      $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + \frac{1}{2^h}$
      $\Delta D_1 \leftarrow \Delta D_1 \cup \{j\}$
    else
      $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 + \frac{1}{2^h}$
      $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 - \frac{1}{2^h}$
      $\Delta D_0 \leftarrow \Delta D_0 \cup \{j\}$
  $u = \text{argmax}\{\Delta_0, \Delta_1\}$
  $x[i] = u$
  $D \leftarrow D \cup \Delta D_u$

Teorema: L'algoritmo trova un assegnamento che soddisfa

$$\frac{2^k - 1}{2^k} \, c$$

clausole.