KNAPSACK o ZAINO

INPUT: $v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{N}$

$w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$

$W \in \mathbb{N}$

SOL_AMMISS: $X \leq n$

t.c. $\sum_{i \in X} w_i \leq W$

FUNZ. OB.: $\sum_{i \in X} v_i$

TIPO: MAX

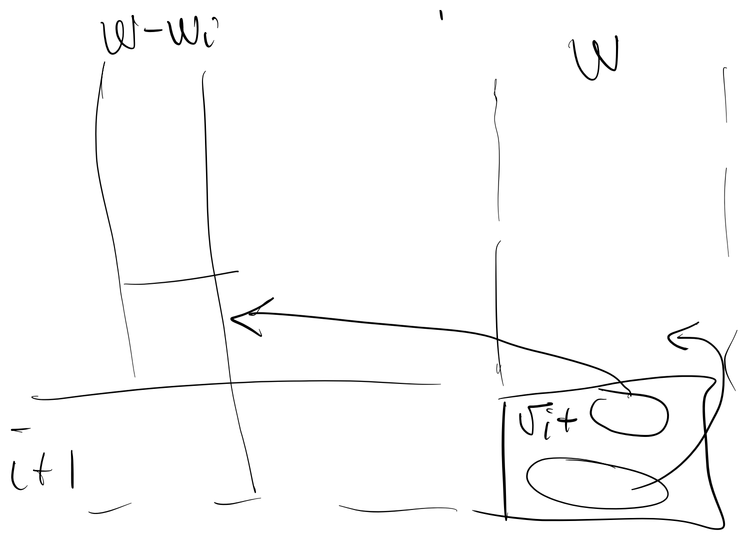
Teorema: KNAPSACK $\in$ NPO-Completo

1° ALG. PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$i \leq n$ $\quad$ $w \leq W$

$OPT[i, w] \triangleq$ MASSIMO VALORE OTTENIBILE CON I PRIMI i OGGETTI E AVENDO UNO ZAINO DI CAPIENZA w

	$w=0$	$w=1$	...	$w=W$
$i=0$	0	0		0
$i=1$				
$i=2$				
$\vdots$				
$i=n$				



$v_i \neq w_i$

$$\boxed{vOPT[i+1, w] = \max\left(vOPT[i, w],\ vOPT[i, w-w_i] + v_i\right)}$$

2° ALG. PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$i \le n$ $\qquad$ $v \le n\, v_{MAX}$

$_wOPT[i, v] \triangleq$ minimo peso che sono costretto a trasportare se voglio usare solo i primi i oggetti e voglio portarmi a casa un valore $\ge v$

$i \backslash v$	$v=0$	$v=1$	$v=2$	...		$n v_{MAX}$
$i=0$	0	∞	∞		∞	∞
$i=1$	0					
$i=2$	0					
$\vdots$	0					
$i=n$	0			$\boxed{}$		
				$\le W$	$> W$	$> W$

$$wOPT[i+1, v] = \min\Big(wOPT[i, v],\ wOPT[i, \max(v - v_i, 0)] + w_i \Big)$$

$$\vartheta \triangleq \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2n}$$

$(1+\varepsilon)$-appr.

$X = (v_i, w_i, W)$ input di Knapsack

$\to \bar{X} = (\bar{v}_i, w_i, W) \quad \to \bar{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\vartheta} \right\rceil \vartheta$

$\hat{X} = (\hat{v}_i, w_i, W) \quad \to \hat{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\vartheta} \right\rceil$

$v^*, \quad \bar{v}^*, \quad \hat{v}^*$

$S^*, \quad \bar{S}^*, \quad \hat{S}^*$

<u>Oss-1</u>:

$\bar{v}^* = \vartheta\, \hat{v}^*$

$\bar{S}^* = \hat{S}^*$

Lemma 1: Sia S una sol. ammissibile.

$$(1+\varepsilon)\sum_{i\in\hat{S}^*} v_i \geq \sum_{i\in S} v_i$$

Dim: $$\sum_{i\in S} v_i \leq \sum_{i\in S} \overline{v_i} \quad \left(\text{ARROT. PER ECC.}\right)$$

$$\leq \sum_{i\in\overline{S}^*} \overline{v_i}$$

$$= \sum_{i\in\hat{S}^*} \overline{v_i} \quad \left(\hat{S}^* = \overline{S}^* \text{ [OSS. 1]}\right)$$

$$\leq \sum_{i\in\hat{S}^*} (v_i + \vartheta) \leq$$

$$\leq \sum_{i\in\hat{S}^*} v_i + n\vartheta =$$

$$= \sum_{i\in\hat{S}^*} v_i + \cancel{n}\frac{\varepsilon v_{max}}{2\cancel{n}}$$

$$(*) \qquad \sum_{i \in S} v_i \le \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2}$$

$S = \{MAX\}$

$$v_{MAX} \le \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2} \le$$

$$\le \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i + \frac{v_{MAX}}{2} \quad (\varepsilon \le 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i \ge \frac{v_{MAX}}{2} \qquad (**)$$

$$(*) + (**) \qquad \sum_{i \in S} v_i \underset{(*)}{\le} \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2} \underset{(**)}{\le}$$

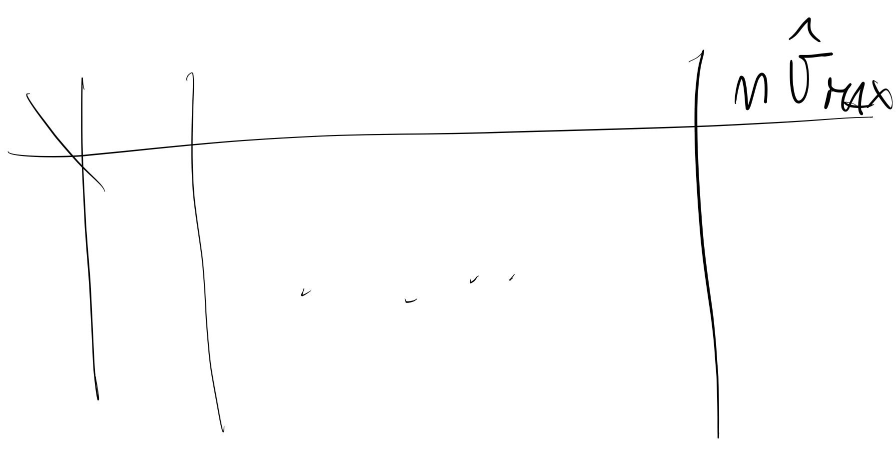
$$\le \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i + \varepsilon \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i =$$

$$= (1+\varepsilon) \sum_{i \in \hat{S}^*} v_i \qquad \square$$

Thm: $(1+\varepsilon)\sum_{i \in \hat{S}^*} v_i \geq \sum_{i \in S^*} v_i = v^*$

Cioè risolvendo $\hat{X}$ ottengo una soluzione il cui valore originale è $\frac{1}{1+\varepsilon}$ dell'ottimo.

1) Dato X in input
2) Ricava $\hat{X}$
3) Risolvi $\hat{X}$
4) La soluzione ottenuta è una $(1+\varepsilon)$-appross.



$$\hat{\vartheta}_{MAX} = \left\lceil \frac{\vartheta_{MAX}}{\vartheta} \right\rceil = \left\lceil \frac{\cancel{\vartheta_{MAX}}\, n}{\varepsilon\, \cancel{\vartheta_{MAX}}} \right\rceil =$$

$$= \left\lceil \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{n}{\varepsilon} + 1$$

N° col.

$$n\hat{\vartheta}_{MAX} \leq \boxed{\frac{n^2}{\varepsilon} + n}$$

Polinomiale nell'input.