ALGORITMI E COMPLESSITÀ

Paolo Boldi

NOTAZIONI

INS. NUM.

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}^+$ $\mathbb{Q}^+$ $\mathbb{R}^+$

STRINGHE

Σ <u>alfabeto</u> (= ins. finito)

$(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$

$w \in \Sigma^*$ $|w|$

$w = w_0 w_1 \dots w_{|w|-1}$

FUNZ.

$B^A = \{ f \mid f : A \to B \}$

$k = \{0, 1, \dots, k-1\}$

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0,1\}$ $\qquad 2^*$

$$2^A = \{f \mid f : A \to 2\} =$$
$$= \{f \mid f : A \to \{0,1\}\} =$$
$$= \{X \mid X \subseteq A\} =$$
$$= P(A)$$

$$A^2 = \{f \mid f : 2 \to A\} =$$
$$= \{f \mid f : \{0,1\} \to A\} =$$
$$= A \times A$$

2^* $\qquad 2^{(2^*)}$

$\boxed{\text{PROBLEMA}}$ Π

1) Insieme di input $I_\Pi \subseteq 2^*$
2) " " output $O_\Pi \subseteq 2^*$
3) Funzione

$$Sol_\Pi : I_\Pi \to \left(2^{O_\Pi} \setminus \{\emptyset\}\right)$$

$x \mapsto$ insieme di output corretti per x

- Decidere se un numero naturale è primo
- Emettere il MCD fra due naturali positivi
- SAT

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_7 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_4)$$

letterali

clausola

3 5

11 101

11 11 01 11 00 11

ALGORITMO per Π

$$x \in I_\Pi \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y \in O_\Pi$$

t.c. $y \in Sol_\Pi(x)$

complessità
- algoritmica
- strutturale

COMPLESSITÀ ALGORITMICA

Π 1) Esiste un algoritmo che risolve Π?

se sì 2) A sia un algoritmo per Π

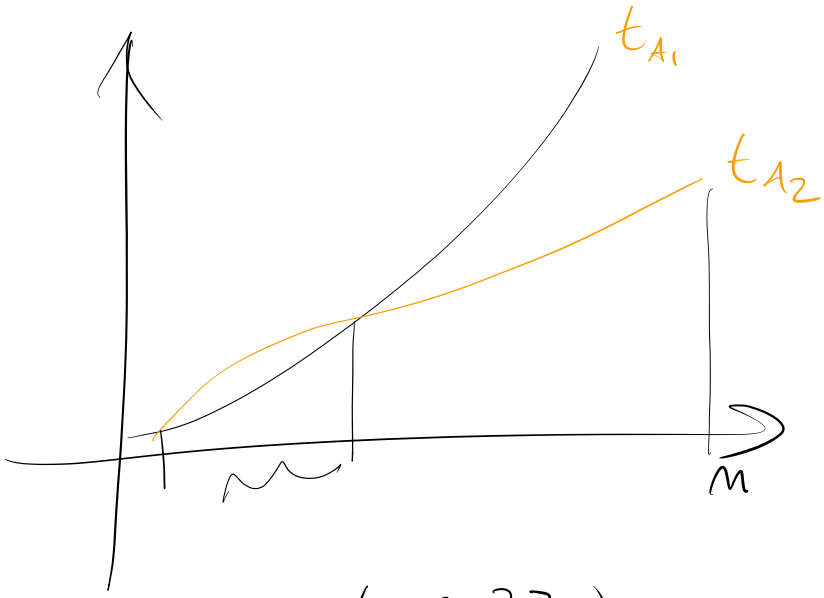
- Funzione di costo

$$T_A : I_\Pi \to \mathbb{N}$$

$$t_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \left(\text{worst case}\right)$$

$$n \mapsto \max \left\{ T_A(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in I_\pi \\ |x| = n \end{array} \right\}$$

$$t_A(100) = 75000$$



(ASINTOTICA)

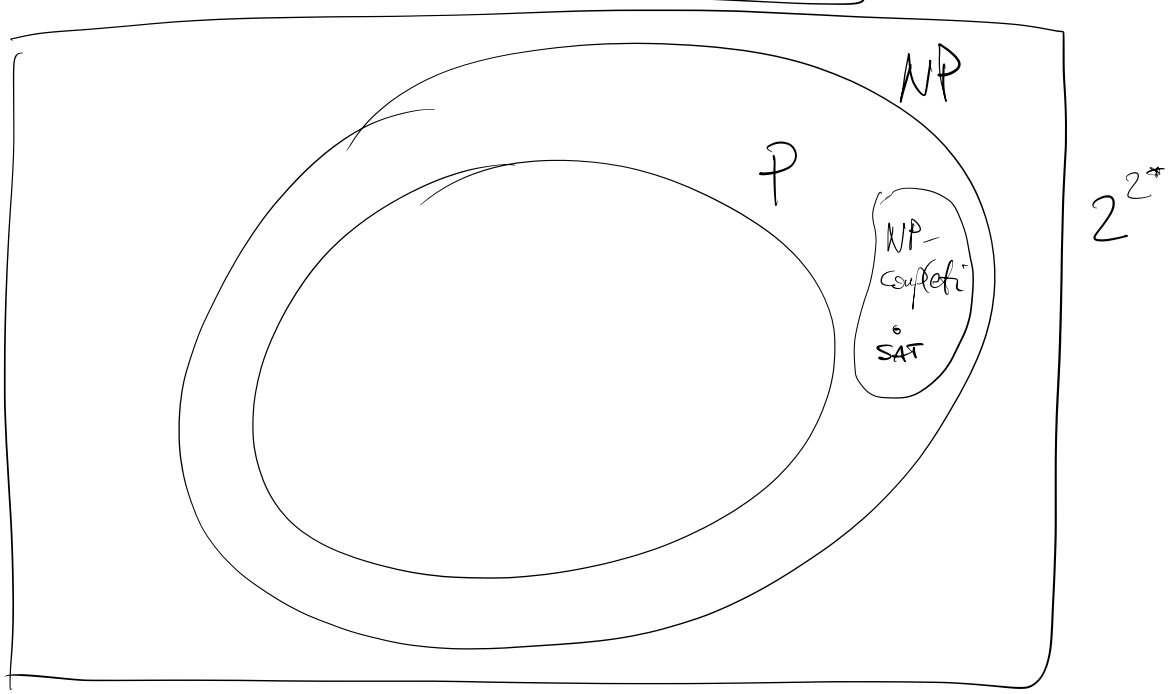
$O(n^{2.37})$ upper bound

$O(n^2)$

$\Omega(n^2)$ lower bound

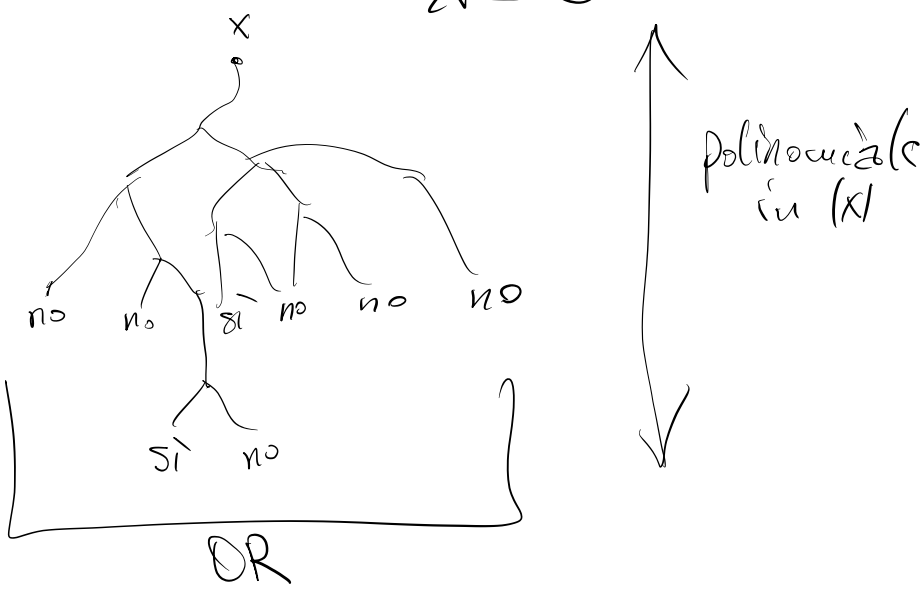
COMPLESSITÀ STRUTTURALE

PROBL. DECIS. $\equiv$ 2^{2^*}



NP

$X =$ ☺



RIDUCIBILITÀ IN TEMPO POL.

$\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ <u>iff</u>

$\exists f : 2^* \to 2^*$

a) $f(x)$ è calc. in tempo polinomiale

b) $\forall x \in I_{\Pi_1}$ $f(x) \in I_{\Pi_2}$

e

$Sol_{\Pi_1}(x) = \{yes\}$ <u>sse</u> $Sol_{\Pi_2}(f(x)) = \{yes\}$

<u>Lemma</u>: $\Pi_2 \in P$ e $\Pi_1 \leq_p \Pi_2 \Rightarrow \Pi_1 \in P$

$$NP\text{-completi} = \{ \Pi \in NP \mid \forall \Pi' \in NP.\ \Pi' \leq_p \Pi \}$$

$SAT \in NP\text{-completi}$

$SAT \leq_p \Pi$