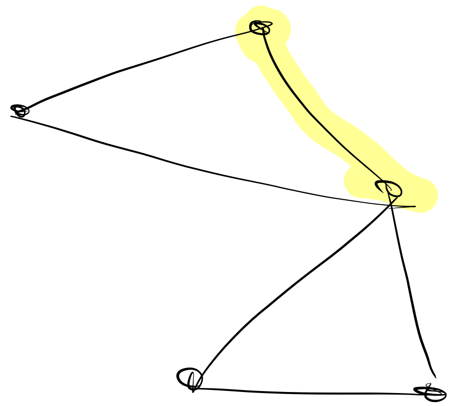


$X \subseteq V$ $\quad X \neq \emptyset$, $X \neq V$

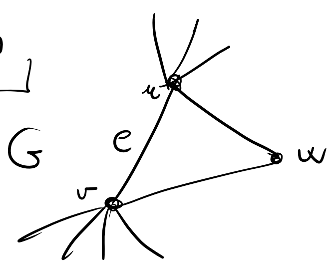
taglio $E_X = \{ e \mid e \cap X \neq \emptyset,\ e \cap X^c \neq \emptyset \}$ sia

$|E_X|$ MIN

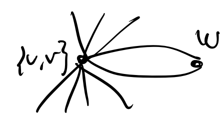
_ if G non connesso
emetti una componente connessa

_ else

while $|V| > 2$
- $e \leftarrow$ lato a caso
- $G \leftarrow G \downarrow e$



$\rightarrow G \downarrow e$



$G_1, G_2, \dots,$

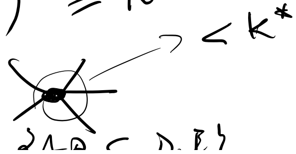
G_i grafo all'inizio dell'i-esimo ciclo

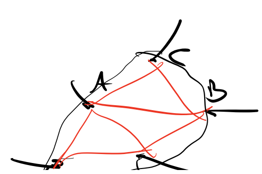
$S^* \subseteq V$ soluzione ottima $(|E_{S^*}|$ MIN$)$

$k^* = |E_{S^*}|$

1) $d_{MIN}(G_i) \geq k^*$

G_i





IMPOSS.

2) $$\#\text{lati di } G_i = \frac{\sum_{v \in V_{G_i}} d_{G_i}(v)}{2} \geq \frac{|V_{G_i}| \, k^*}{2} =$$

$$= \frac{(n-i+1)k^*}{2}$$

$\mathcal{E}_i$ = durante l'i-esima iterazione non abbiamo contratto un arco di E_{S^*}

<u>Lemma:</u>

$$P[\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] = 1 - P[\neg \mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] =$$

$$= 1 - \frac{k^*}{\#\text{lati di } G_i} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\cancel{k^*} \, 2}{(n-i+1)\cancel{k^*}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{n-i+1} = \frac{n-i+1-2}{n-i+1} =$$

$$= \frac{n-i-1}{n-i+1}. \qquad \square$$

$$P[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-2}] =$$

$$= P[\mathcal{E}_1] \, P[\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1] \, P[\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] \dots P[\mathcal{E}_{n-2} \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-3}] =$$

$$\underset{\text{Lemma}}{\geq} \frac{n-1-1}{n-1+1} \cdot \frac{n-2-1}{n-2+1} \cdot \frac{n-3-1}{n-3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(n-2)-1}{n-(n-2)+1} =$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-2} i}{\prod_{i=3}^{n} i} = \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

Teorema: L'algoritmo di Karger elegge l'ottimo con probabilità $\geq \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

Corollario: Eseguite l'alg. di Karger $\underbrace{\binom{n}{2} \ln n}$ volte e prendete il taglio minimo. Otteniamo l'ottimo con probabilità $\geq 1 - \frac{1}{n}$.

Dim: $\forall x \geq 1$

$$\frac{1}{4} \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \leq \frac{1}{e}$$

La prob. di non trovare l'ottimo ~~alle~~ in nessuna

~~k-esima~~ esecuz. e

$$\le \boxed{\left(1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}\right)^{\binom{n}{2}}}^{\ln n} \le \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} =$$

$$= \frac{1}{n}$$

$\square$

ALGORITMO PER SET COVER BASATO SU PROBABILISTIC ROUNDING (ARROTONDAMENTO)

SET COVER

Π

INPUT: $S_1, \dots, S_m \subseteq U$ $\qquad \bigcup_{i=1}^{m} S_i = U$ $\qquad n \triangleq |U|$

$w_1, \dots, w_m \in \mathbb{Q}^+$

SOL. AMMISS.: $\mathcal{S} \subseteq m$ t.c.

$\bigcup_{i \in \mathcal{S}} S_i = U$

FUNZ. OBIETTIVO: $\sum_{i \in \mathcal{S}} w_i$

TIPO: MIN

Π_{IPL} $\qquad \Pi_{PL}$

$$\min \quad w_1 x_1 + \dots + w_m x_m$$

$$\begin{cases} x_j \le 1 \\ x_j \ge 0 \end{cases} \forall j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i : u \in S_i} x_i \ge 1 \qquad \forall u \in U$$

$\boxed{\text{RICORDIAMO}}$

1) <u>Disuguaglianza di Markov</u>

Per ogni v.a. X non negativa e per ogni $\alpha > 0$

$$P[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

2) <u>Union bound</u> (o disug. di Boole)

$$P\left[\bigcup_i \mathcal{E}_i\right] \leq \sum_i P[\mathcal{E}_i]$$

INPUT: Un'istanza di SetCover Π
$(S_1, \dots, S_m, w_1, \dots, w_m)$ e un
$k \in \mathbb{N}^+$

- Risolve l'istanza rilassata Π_{PL}.
Sia $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m$ la soluzione.

$\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$

· **for** $t = \{1, \dots, \lceil k + \ln n \rceil\}$ **times**

for $i = 1, \dots, m$
con probabilità $\hat{x}_i$
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{i\}$

output $\mathcal{S}$

Teorema: La probabilità che l'algoritmo produca una soluzione ammissibile è $\geq 1 - e^{-k}$

Dim: $P[\text{sol. sia ammissibile}] =$

$= 1 - P[\text{almeno un elemento dell'Universo non sia coperto}] =$

$B_u =$ "u non è coperto nella soluz. ottenuta"

$$= 1 - P\left[\bigcup_{u \in U} B_u\right] \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{u \in U} \underbrace{P[B_u]}_{} =$$

$$= 1 - \sum_{u \in U} \prod_{i : u \in S_i} P[S_i \text{ non è stato scelto}] =$$

$1 - x \leq e^{-x}$

$$= 1 - \sum_{u \in U} \prod_{i : u \in S_i} \left(1 - \hat{x}_i\right)^{\lceil k + \ln n \rceil} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{u \in U} \underbrace{\prod_{i : u \in S_i} e^{-\hat{x}_i (k + \ln n)}}_{} =$$

$$= 1 - \sum_{u \in U} e^{-(k + \ln n) \sum_{i : u \in S_i} \hat{x}_i} \geq$$

≥ 1

$$\geq 1 - \sum_{u \in U} e^{-(k + \ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{u \in U} \frac{e^{-k}}{n} = 1 - e^{-k} \frac{1}{n} |U| =$$

$$= 1 - e^{-k} \qquad \square$$

Teorema: $\forall \alpha \in [0,1)$

$P[\text{fatt. di appross.} \geq \alpha(k+\ln n)] \leq \frac{1}{\alpha}$

Dim: 1) $\hat{v} = \sum_i w_i \hat{x}_i \leq v^*$

2) prob. che S_i venga scelto è

$\leq \underbrace{(k+\ln n)\hat{x}_i}$

$P[S_i \text{ scelto}] = P[S_i \text{ scelto durante una iter.}]$

$P[S_i \text{ scelto durante l'iter. } t]$

$= P[\bigcup_t S_i \text{ scelto durante l'iter. } t] =$

$\leq \sum_t P[S_i \ldots$

union bound

$= \hat{x}_i (k+\ln n)$

$\underbrace{E[v_{out}]} = E[\sum_{i \in S} w_i] \overset{\text{Linearità}}{=} \sum_i w_i P[S_i \text{ sia nell'opt}]$

$\leq \sum_i w_i (k+\ln n)\hat{x}_i =$

$= \hat{v} (k+\ln n) \leq \underbrace{v^*}\underbrace{(k+\ln n)}$

disug. di Markov

$$P\left[\boxed{\frac{v_{OUT}}{v^*}} \geq \alpha(k+\ln n)\right] \leq \frac{E[v_{OUT}]}{\alpha(k+\ln n)v^*} \leq$$

$$\leq \frac{\cancel{v^*}\cancel{(k+\ln n)}}{\alpha\cancel{(k+\ln n)}\cancel{v^*}} = \frac{1}{\alpha}$$

fatt. di approssim.

Corollario: Se si esegue l'alg. con $k=3$, c'è il 45% di prob. di ottenere una sol. ammissibile con rapp. appross. $\leq 6+2\ln n$.

Dim: $\mathcal{E}_{ammissibile}$ = "ottengo una sol. ammiss."

$\mathcal{E}_{buona}$ = "output sia entro $6+2\ln n$ dall'ottimo"

$$P[\mathcal{E}_{ammissibile} \wedge \mathcal{E}_{buono}] =$$

$$= 1 - P[\neg\mathcal{E}_{ammissibile} \vee \neg\mathcal{E}_{buono}] \geq$$

$$\geq 1 - P[\neg\mathcal{E}_{ammiss.}] - P[\neg\mathcal{E}_{buono}] \geq$$

$$\geq 1 - e^{-3} - \frac{1}{2} \geq$$

appl. Teorema 2 con $\alpha=2$

$\approx 45\%$