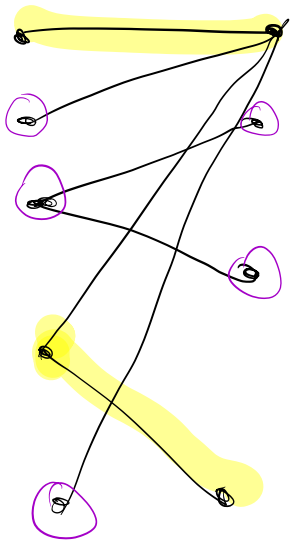
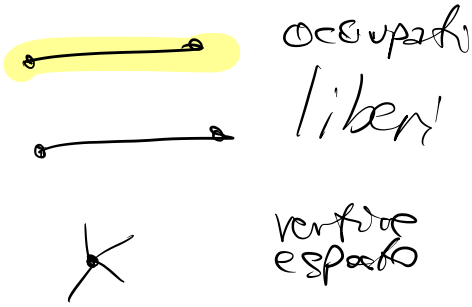
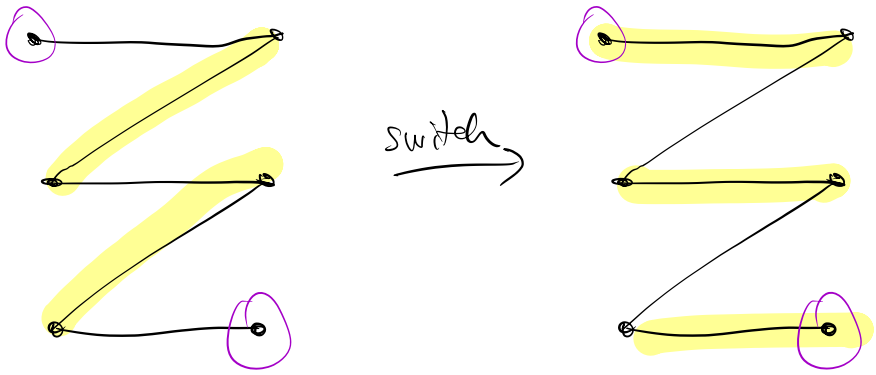
G M





CAMMINO AUMENTANTE:

- cammino che alterna lati liberi e lati occupati e
- che inizia e termina su un vertice esposto



Teorema: $\exists$ cammino aumentante per M $\iff$ M non è massimo

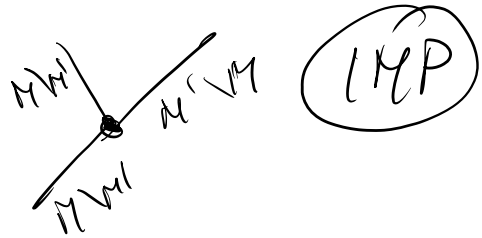
Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Vedi sopra (switch)

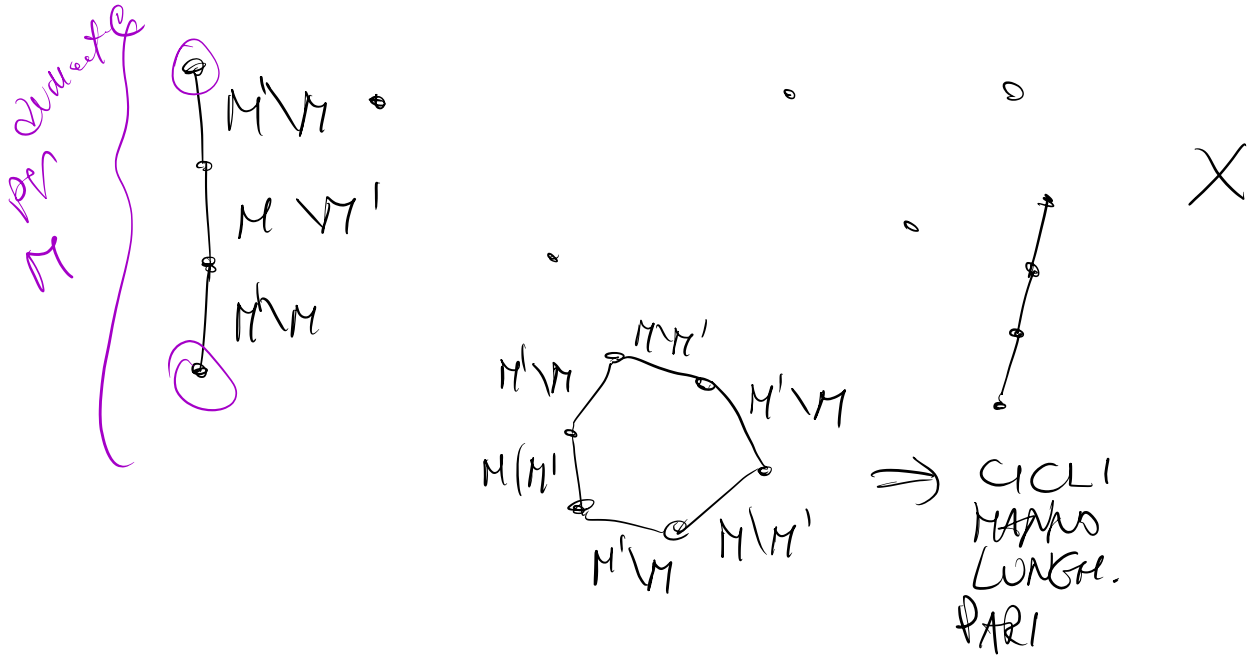
$\boxed{\Leftarrow}$ M non sia massimo e non esistano cammini aumentanti (p.a).

M' matching $|M'| > |M|$.

$$X = M \triangle M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$$

1) Su ogni vertice incidono al massimo due lati di X




indice per M
M'\M
M\M'
M'\M
M\M'
M'\M
M'\M
M\M'
M'\M
M\M'
M'\M
CICLI MANCO LUNGH. PARI

ALGORITMO:

INPUT = $G=(V,E)$ bipartito

$M = \emptyset$

while ($\exists$ cammino aumentante π per M)

fai uno switch su π

$O(nm)$

TEMPO: $O(n^2 m)$

VISITE DI GRAFI

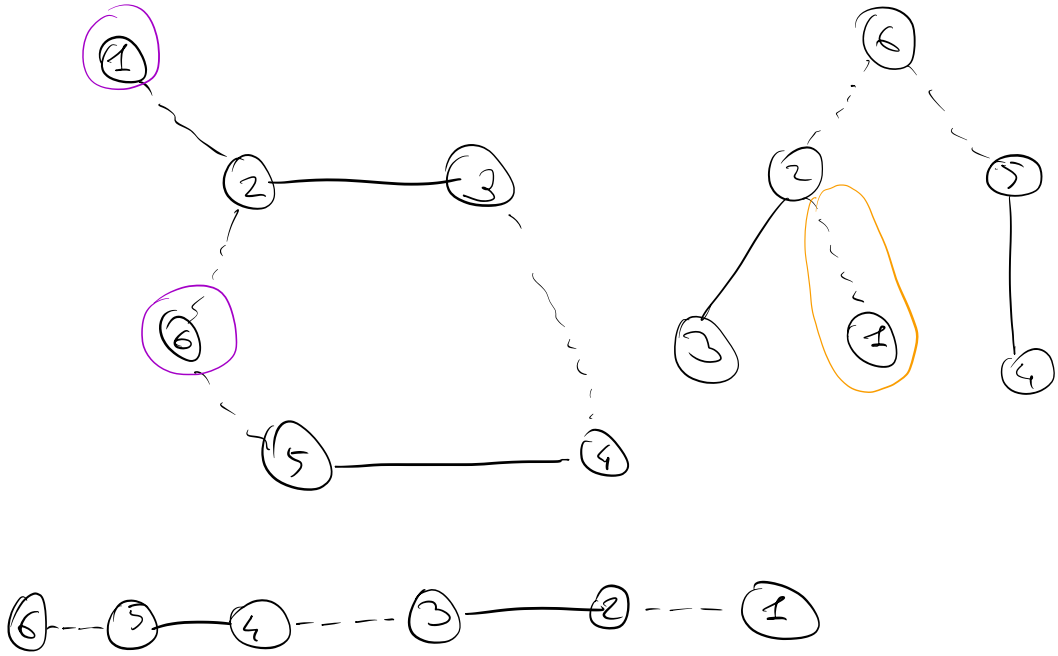
vertici
- bianchi: sconosciuti
- grigi: conosciuti ma non visitati] FRONTIERA
- neri: visitati

- tutti i vertici sono bianchi
- $F = \emptyset$
- $F = \{v_0\}$, $v_0 \leftarrow$ grigio
- while $F \neq \emptyset$ {

$O(m)$

  $v \leftarrow$ get F
  visita v
  $v \leftarrow$ nero
  for all $w \in N(v)$
    if w è bianco
      $w \leftarrow$ grigio
      $F \leftarrow F \cup \{w\}$

}



<u>Corollario</u>: MAXMATCHING $\in$ PO

<u>Corollario</u>: PERFECT MATCHING $\in$ P

Dato un grafo, stabilire se esiste un matching che incide su tutti i vertici

LOAD BALANCING

PROBLEMA: LOAD BALANCING

INPUT: n task $t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{N}^+$

m macchine

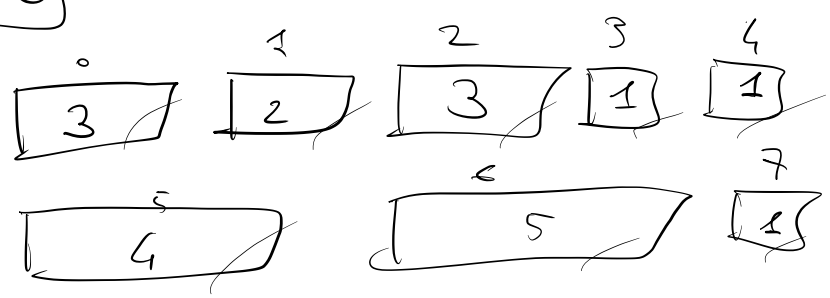
SOL. ACCETTABILE: un assegnamento dei task alle macchine il cui costo è

$$L_i = \sum_{j \text{ assegnato a } i} t_j$$

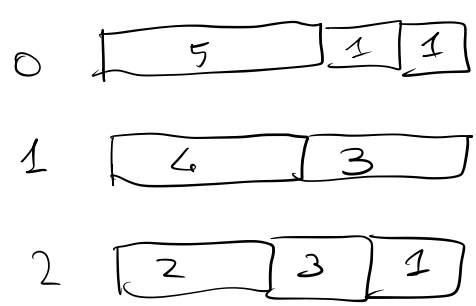
$$L = \max_i L_i$$

TIPO: MIN

ESEMPIO



$m=3$



$L_0 = 7$

$L_1 = 7$

$L_2 = 6$

$L = 7$

ALGORITMO GREEDY-BALANCE

$O(n \log n)$

$L_i \leftarrow 0 \quad \forall i \in m$

for $j = 0, 1, \dots, n-1$

- $\bar{i} \leftarrow \arg\min_i L_i$
- assegna il task j alla macchina $\bar{i}$
- $L_{\bar{i}} \leftarrow L_{\bar{i}} + t_j$

ESEMPIO

0	1	2	3	4
3	2	3	1	1

5	6	7
4	5	1

$m = 3$

	L_i	0		
0	5	3	1	1
1	7	2	1	4
2	8	3	5	

$L = 8$

Teorema: GREEDY BALANCE è un algoritmo 2-approssimante per LOAD BALANCING.

Dim:

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE } 1}$ $\quad L^* \geq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n-1} t_j$

$$\sum_{i=0}^{m-1} L_i^* = \sum_{j=0}^{n-1} t_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max L_i^*}_{L^*} \geq \frac{1}{m} \sum_j t_j$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE } 2}$ $\quad L^* \geq \max_j t_j$

- Eseguiamo GREEDY BALANCE e sia $\hat{i}$ la macchina più carica alla fine dell'esecuzione

$$L_{\hat{i}} = L$$

Sia $\hat{j}$ l'ultimo task assegnabile.

(*) $\quad L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} \leq L_i' \leq L_i \quad \forall i$

il carico della macchina i quando abbiamo assegnato il task $t_{\hat{j}}$

Sommiamo su tutti gli i

$$m\left(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}}\right) \leq \sum_i L_i = \sum_j t_j$$

$$(**) \quad L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}} \leq \frac{1}{m} \sum_j t_j \underset{\text{Oss. 1}}{\leq} L^*$$

$$L = L_{\hat{i}} = \underbrace{\left(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}}\right)}_{\downarrow \leq L^* \; (**)} + \underbrace{t_{\hat{j}}}_{\downarrow \leq L^* \; \text{Oss. 2}} \leq 2L^*$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{L}{L^*} \leq 2 \qquad \square$$

<u>Teorema</u>: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un input su cui GREEDY BALANCE fornisce una soluzione L

$$2 - \varepsilon \leq \frac{L}{L^*} \leq 2$$