$n \qquad t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$

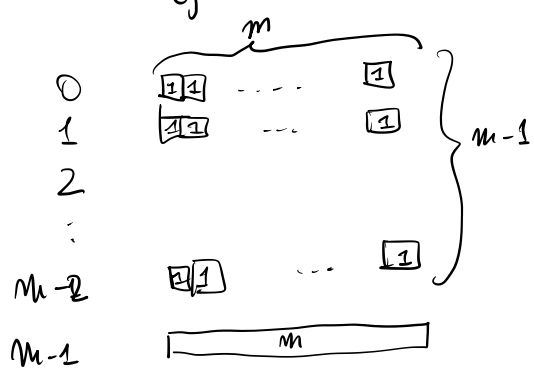
m

Teorema: Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un input su cui la soluzione fornita da GREEDY BALANCE

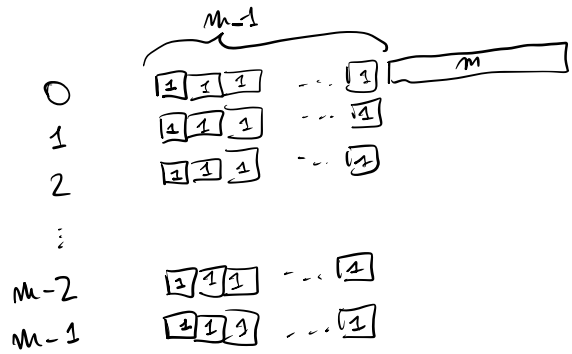
$$2 - \varepsilon \le \frac{L}{L^*} \le 2$$

Dim: Sia $m > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$n = \underbrace{m(m-1)}_{\text{i primi hanno } t_j = 1} + \underbrace{1}_{t_j = m}$$



$L^* = m$



$L = 2m - 1$

$$\frac{L}{L^*} = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m} \geq 2 - \varepsilon. \quad \square$$

ALGORITMO SORTED BALANCE $O(m \log m + n \log m)$

- Ordina i t_j in modo t.c. $t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots$
- Esegui GREEDY BALANCE $O(n \log m)$

Teorema: SORTED BALANCE è un algoritmo 3/2-approssimante.

Dim: Se $n \leq m$, soluzione ottima. Assumiamo $n > m$.

Osservazione $L^* \geq 2t_m$

$$\underbrace{t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_{m-1} \geq t_m}_{m+1} \geq \dots$$

Almeno una macchina ne riceve due $\Rightarrow$ carico $t_i + t_j \geq 2t_m$

Sia $\hat{i}$ l'indice della macchina con carico massimo $L = L_{\hat{i}}$.

Se $\hat{i}$ ha avuto un solo task, la soluzione è ottima. Assumiamo che ne abbia avuti almeno due, e

Sia $\hat{j}$ l'ultimo assegnabile.

$$\hat{j} \geq m$$

$$\Rightarrow \quad t_{\hat{j}} \leq t_m \underset{\text{oss.}}{\leq} \frac{1}{2} L^*.$$

$$L = L_{\hat{i}} = \underbrace{(L_{\hat{i}} - t_{\hat{j}})}_{\leq L^*} + \underbrace{t_{\hat{j}}}_{\leq \frac{1}{2} L^*} \leq \frac{3}{2} L^*. \qquad \square$$

Risultato [Graham 1969]:

[SORTED BRANCE è 4/3 - approssimante

Risultato [Hochbaum et al. 1988]

[LOAD BALANCING $\in$ PTAS

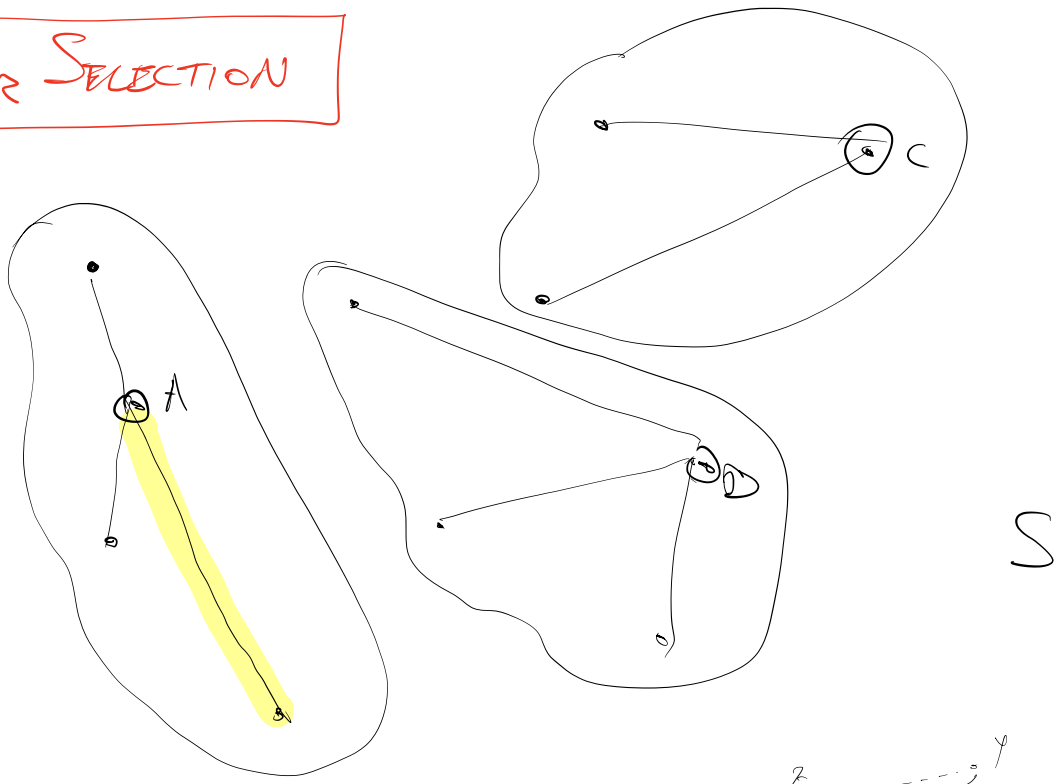
LOAD BALANCING $\notin$ FPTAS (se $P \neq NP$)

N

10100 20

$$\underbrace{00000000000000000000001}_{\text{rappr. unaria}}$$

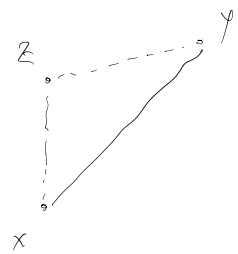
CENTER SELECTION



INPUT

- S insieme di uffici

$$d : S \times S \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$



SPAZIO METRICO
$$\begin{cases} d(x,x) = 0 \\ d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$$

- $K \in \mathbb{N}^+$ numero di centri

OUTPUT: $C \subseteq S \qquad |C| \leq K$

FUNZ. OBIETTIVO:

$$d(x, C) := \min_{c \in C} d(x,c)$$

$$\boxed{\rho(C)} = \max_{x \in S} d(x, C)$$

TIPO: MIN

CENTER SELECTION PLUS

INPUT: S, $d: S \times S \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^+$, $r \in \mathbb{R}^{>0}$

$C \leftarrow \emptyset$

while $S \neq \emptyset$

$\bar{c} \leftarrow$ scelto a caso in S in modo che $d(\bar{c}, C) > 2r$

$C \leftarrow C \cup \{\bar{c}\}$

~~togli da S tutti gli x t.c. $d(x, \bar{c}) \leq 2r$~~

if $|C| \leq k$

output C

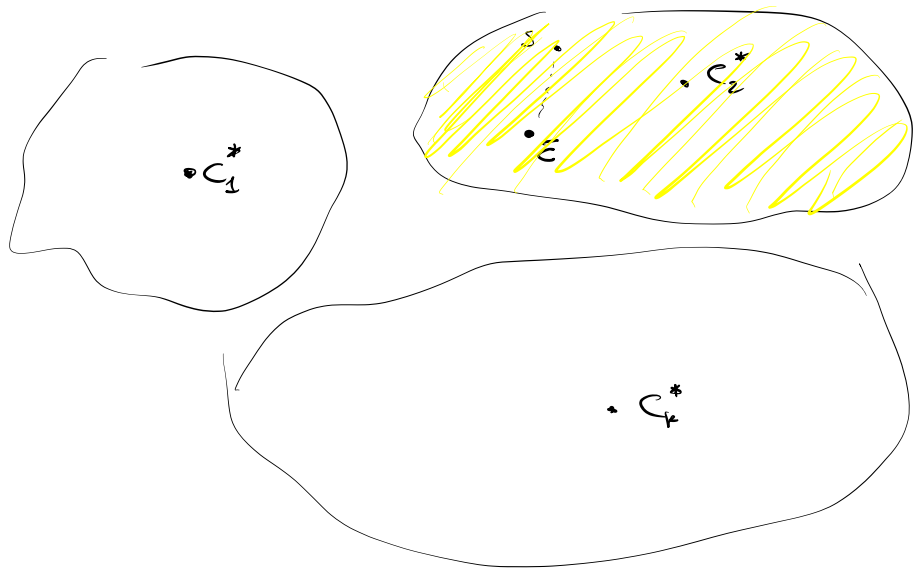
else

output "IMPOSSIBILE"

Proprietà 1: Se CENTER SELECTION PLUS emette una soluzione C, allora C è una soluzione ammissibile e ha raggio $\rho(C) \leq 2r$.

Proprietà 2: Se $r \geq \rho^*$, CENTER SELECTION PLUS emette un output $\neq$ "IMPOSSIBILE"

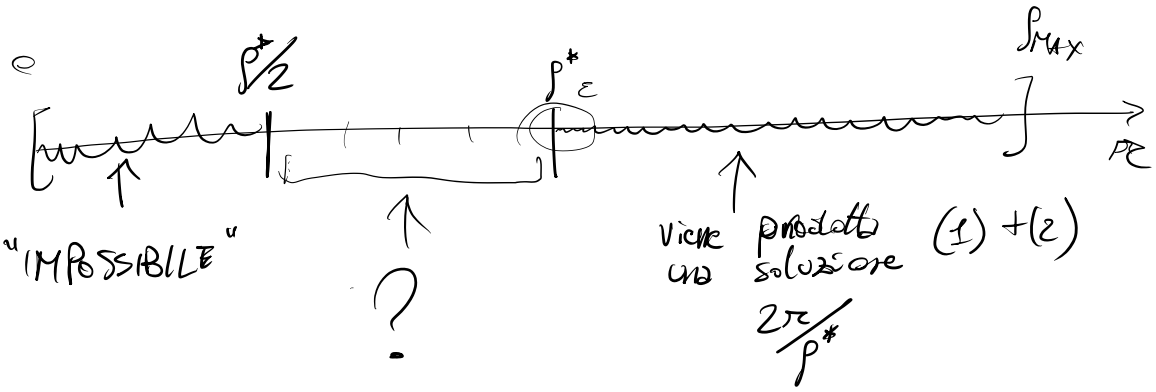
Dim: Sia c^* una soluzione ottima



$$d(\bar{c}, s) \le d(\bar{c}, c^*) + d(c^*, s) \le \rho^* + \rho^* =$$
$$= 2\rho^* \le 2r$$

$\Rightarrow$ Il while termina dopo $\le K$ iterazioni

$\Rightarrow |C| \le K$.



GREEDY CENTER SELECTION

INPUT: S, $d: S \times S \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^+$

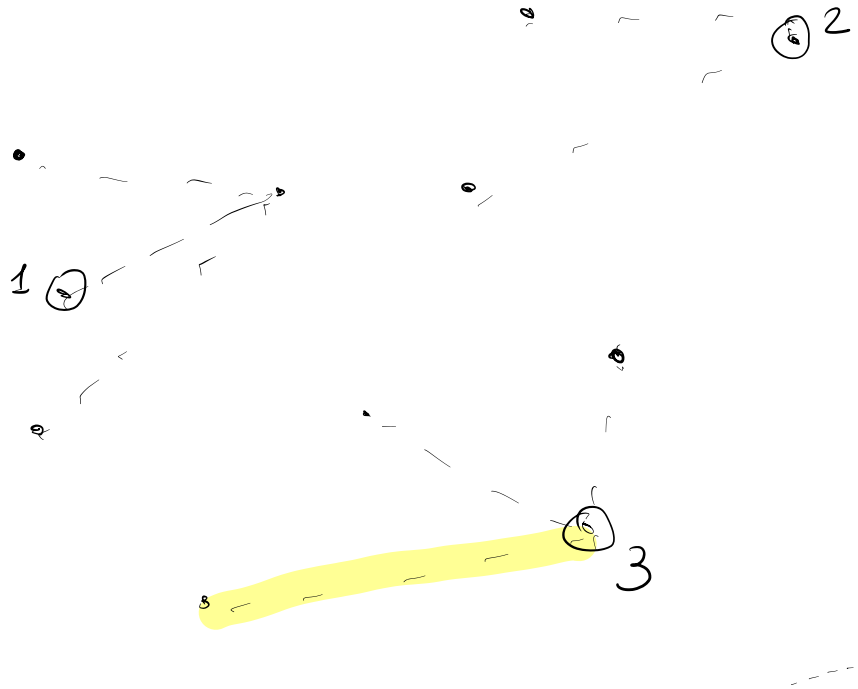
<u>if</u> $|S| \leq k$
  output S
  STOP

scegliamo un qualunque $\bar{c} \in S$

$C \leftarrow \{\bar{c}\}$

<u>while</u> $|C| < k$
  scegli $\bar{c} \leftarrow \arg\max_{s} d(s, C)$
  $C \leftarrow C \cup \{\bar{c}\}$

<u>output</u> C



Teorema: GREEDY CENTER SELECTION è una 2-approssimazione per CENTER SELECTION

Dim: Per assurdo, supponiamo che l'output C sia $\rho(C) > 2\rho^*$.

$\Rightarrow \exists \hat{s} \in S.\ d(\hat{s}, C) > 2\rho^*$

Consideriamo l'i-esima iterazione di GREEDY CENTER SELECTION

Sia C_i l'insieme dei centri

all'inizio dell'i-esima iterazione

e $\bar{c}_i$ il centro scelto

per qualunque s

$$d(\bar{c}_i, \hat{C}_i) \geq d(s, \overline{C_i}) \geq d(\hat{S}, \overline{C_i}) \geq$$

$$\geq d(\hat{S}, C) > 2\rho^*$$

$\Rightarrow$ I k cicli sono una delle esecuzioni possibili dei primi k cicli di CENTER SELECTION ALG quando $r = \rho^*$.

Siccome $d(\hat{S}, C) > 2\rho^*$

$\hat{S}$ non è ancora stato rimosso

$\Rightarrow$ Faremo un'iterazione in più

$\Rightarrow$ Evettiamo IMPOSSIBILE

$\Rightarrow$ Proprietà 2 $r \geq \rho^*$, NON evettiamo impossibile

Assurdo $\square$