Teorema: Esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ t.c. MaxSat non è $(1+\bar{\varepsilon})$-approssimabile (a meno che $P = NP$).

Dim: $L \in NP$-completo

$L \in PCP[r(n), q]$ per qualche $q \in \mathbb{N}$ e $r(n) \in O(\log n)$

$\rightsquigarrow V$

$z \in \Sigma^*$ $\quad R \in \mathcal{R} = 2^{r(|z|)}$

$i_1^{z,R}, \; i_2^{z,R}, \; \dots, \; i_q^{z,R}$ $\qquad 7, 13, 17, 21$

$X_1, X_2, X_3, \dots$ variabili logiche

$X_i = \text{true}$ sse i-esimo bit di w è 1

$X_{i_1^{z,R}}, \; X_{i_2^{z,R}}, \; \dots, \; X_{i_q^{z,R}}$

$X_7 \quad X_{13} \quad X_{17} \quad X_{21}$

φ_z^R = formula logica che dice se z verrà accettato o no sulla base dei valori di w in certe posiz.

$\leq 2^q$ clausole con q letterali

$$\boxed{\Phi_z = \underbrace{\bigwedge_{R \in \mathcal{R}} \boxed{\varphi_z^R}}}$$

tempo polin.
dim. polin.

2^q clausole

tempo polinomiale
dim. costante

$2^{r(n)} = 2^{O(\log n)} =$
$= Pol(n)$

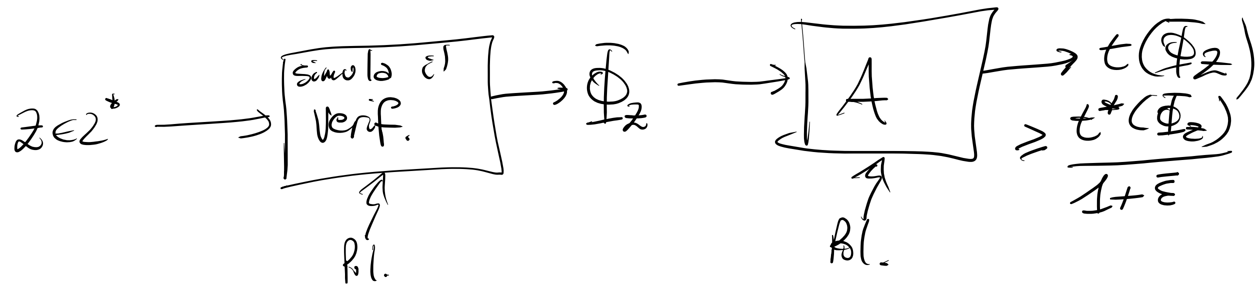
1) $z \in L$. $\exists w \in 2^*$ che fa acc. con prob. 1 $\Rightarrow \Phi_z$ è soddisf.
(cioè ha $|\mathcal{R}| 2^q$ clausole soddisfatte)

2) $z \notin L$ $\forall w \in 2^*$ accetto con prob. $< \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ clausole sodd. $< \frac{|\mathcal{R}|}{2} 2^q + \frac{|\mathcal{R}|(2^q - 1)}{2} =$

$$= 2^q |\mathcal{R}| - \frac{|\mathcal{R}|}{2}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2^{q+1}}$$

Ammettiamo per assurdo che MAX SAT sia $(1+\varepsilon)$-approssimabile attraverso un algoritmo A



$z \in L$

$$t^*(\Phi_z) = 2^q |R|$$

$$t(\Phi_z) \geq \frac{2^q |R|}{1 + \frac{1}{2^{q+1}}} \triangleq \alpha$$

$z \notin L$

$$t^*(\Phi_z) < 2^q |R| - \frac{|R|}{2}$$

$$t(\Phi_z) \leq t^*(\Phi_z) < 2^q |R| - \frac{|R|}{2} \triangleq \beta$$

$$\alpha - \beta = \frac{2^q |R|}{1 + \frac{1}{2^{q+1}}} - 2^q |R| + \frac{|R|}{2} =$$

$$= |R| \frac{2^{q+1} - 2^{q+1}\left(1 + \frac{1}{2^{q+1}}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^{q+1}}\right)}{2\left(1 + \frac{1}{2^{q+1}}\right)} =$$

$$= |R| \frac{2^{q+1} - 2^{q+1} - 1 + 1 + \frac{1}{2^{q+1}}}{2\left(1 + \frac{1}{2^{q+1}}\right)} \to 0$$

$$\alpha > \beta$$