Teorema: GREEDY CENTER SELECTION fornisce una 2-approssimazione di CENTER SELECTION

Dim: P.a. supponiamo che l'alg. fornisca una soluzione con $\rho > 2\rho^*$.

Cioè $\exists \hat{s} \in S$ t.c. $d(\hat{s}, C) > 2\rho^*$.

Sia $\bar{s}_i$ il centro scelto all'i-esima iterazione e C_i l'insieme dei centri in quel momento.

$$\underbrace{d(\bar{s}_i, C_i)} \geq d(\hat{s}, C_i) \geq d(\hat{s}, C) > 2\rho^*$$

$\Rightarrow$ Le prime k iterazioni sono un'esecuzione possibile delle prime k iterazioni di CENTER SELECTION PLUS con $r = \rho^*$

$\Downarrow$

Produce un output che è una

$$\frac{2r}{\rho^*} = \frac{2\rho^*}{\rho^*} = 2\text{- appross.}$$

$\square$

INAPPROSSIMABILITÀ DI CENTER SELECTION

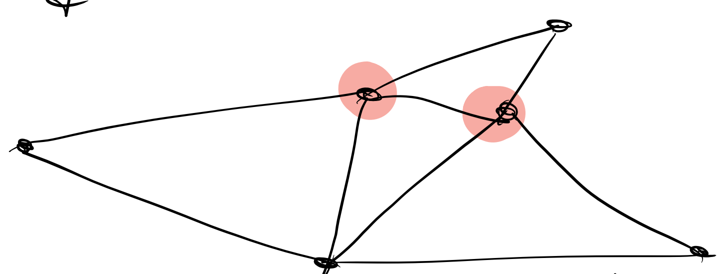
Teorema: Se $P \neq NP$, non esiste $\alpha < 2$ t.c. ci sia un algoritmo polinomiale α-approssimante per CENTER SELECTION.

DOMINATING SET

INPUT: $G=(V,E)$ grafo non orientato

$k \in \mathbb{N}^+$

DECISIONE: $\exists D \subseteq V$ $|D| \leq k$ t.c. $\forall v \in V \setminus D$ sia adiacente a un vertice di D



DOMINATING SET è NP-completo.

$$\Omega = S = V$$

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{u,v\} \in E \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad u \neq v$$

$$\underset{\text{o } 1 \text{ o } 2}{d(u,v)} \leq \underbrace{\underbrace{d(u,z)}_{1,2} + \underbrace{d(z,v)}_{1,2}}_{2,3,4}$$

Diamo questo input a un alg. di CENTER SELECTION che sia α-approssimante (con $\alpha < 2$).

$$\rho^*(S,k) \in \{1,2\}$$

$$\rho^*(S,k) = 1$$

<u>sse</u> $\exists D \subseteq S = V \quad |D| \leq k$

t.c. $\forall s \in S \quad d(s, D) \leq 1$

<u>sse</u> D è un dominating set

$$1 \le \frac{\rho(S,k)}{\rho^*(S,k)} \le \alpha \qquad \alpha < 2$$

$$\rho^*(S,k) \le \rho(S,k) \le \alpha \, \rho^*(S,k)$$

SI

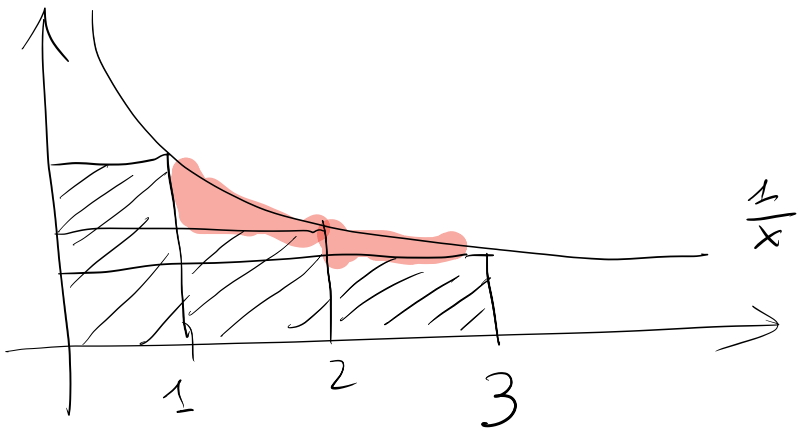
NO

$$1 \le \rho(S,k) \le \alpha \quad < \quad 2 \le \rho(S,k) \le 2\alpha$$

FUNZIONE ARMONICA

$$H: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$



Proprietà 1:

$$H(n) \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= 1 + \left[\ln x\right]_1^n = 1 + (\ln n - \ln 1) =$$

$$= 1 + \ln n$$

$$\boxed{H(n) \leq 1 + \ln(n)}$$

Proprietà 2:

$$\int_t^{t+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_t^{t+1} \frac{1}{t}\, dx = \frac{1}{t}$$

$(*)$

$$H(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \overset{(*)}{\geq} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

$$\boxed{H(n) \geq \ln(n+1)}$$

$$\boxed{\ln(n+1) \leq H(n) \leq 1 + \ln(n)}$$

MIN SET COVER

INPUT: $S_1, S_2, \ldots, S_m$ $\quad \bigcup_{i=1}^{m} S_i = U$

con pesi $w_1, w_2, \ldots, w_m \in \mathbb{Q}^+$

SOL. AMMISSIBILI: $\mathcal{C} \subseteq \{S_1, \ldots, S_m\}$

t.c. $\bigcup_{S_i \in \mathcal{C}} S_i = U$

FUNZ. OBIETTIVO: $W = \sum_{S_i \in \mathcal{C}} w_i$

TIPO: MIN

$n := |U|$

GREEDY SET COVER

$R \leftarrow U$

$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$

while $R \neq \emptyset$

choose S_i minimizing $\boxed{\dfrac{w_i}{|S_i \cap R|}}$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{S_i\}$

$R \leftarrow R \setminus S_i$

OUTPUT $\mathcal{C}$

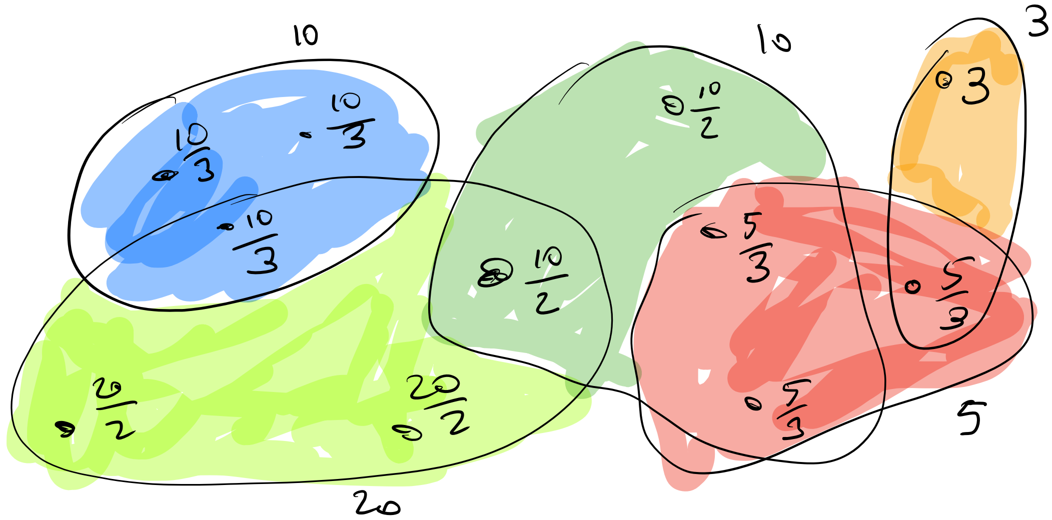
$\forall s \in S_i \cap R$

$c_s := \dfrac{w_i}{|S_i \cap R|}$

Lemma 1: $w = \sum_{s \in U} c_s$

Dim: Quando aggiungiamo S_i a $\mathcal{C}$ ogni elemento di S_i ha $c_s = \dfrac{w_i}{|S_i \cap R|}$

$\Rightarrow$ La loro somma è w_i. $\square$



Lemma 2: Per ogni k

$$\sum_{s \in S_k} c_s \leq H(|S_k|) \cdot w_k$$

Dim: Sia $S_k = \{ \underbrace{s_1, s_2, \ldots, s_d}_{\text{indicizzato in ordine di copertura}} \}$

Consideriamo s_j nel momento in cui viene coperto (da $S_{k'}$)

$$|S_k \cap R| \geq d - j + 1$$

$$c_{s_j} = \frac{w_{k'}}{|S_{k'} \cap R|} \leq \frac{w_k}{|S_k \cap R|} \leq \frac{w_k}{d-j+1}.$$

$$\sum_{s \in S_k} c_s = c_{s_1} + c_{s_2} + c_{s_3} + \ldots + c_{s_d} \leq$$

$$\leq \frac{w_k}{d-1+1} + \frac{w_k}{d-2+1} + \ldots + \frac{w_k}{d-d+1} =$$

$$= \frac{w_k}{d} + \frac{w_k}{d-1} + \ldots + \frac{w_k}{1} =$$

$$= w_k \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{d} \right) = w\, H(d).$$

$\square$

$$M := \max_i |S_i|$$

Teorema: L'algoritmo GREEDY SET COVER è una $H(M)$-approssimazione di SET COVER.

Dim: Sia $w^* = \sum_{S_i \in \mathcal{C}^*} w_i$.

$$(*) \quad \frac{\sum_{s \in S_i} c_s}{H(M)} \le \frac{\sum_{s \in S_i} c_s}{H(|S_i|)} \le w_i \qquad \text{(Lemma 2)}$$

Siccome $\mathcal{C}^*$ è una copertura

$$(**) \quad \sum_{S_i \in \mathcal{C}^*} \sum_{s \in S_i} c_s \ge \sum_{s \in U} c_s \underset{\text{Lemma 1}}{=} w$$

$$w^* = \sum_{S_i \in \mathcal{C}^*} w_i \overset{(*)}{\ge} \sum_{S_i \in \mathcal{C}^*} \frac{\sum_{s \in S_i} c_s}{H(M)} \overset{(**)}{\ge} \frac{\sum_{s \in U} c_s}{H(M)} = \frac{w}{H(M)}$$

$$\Rightarrow \frac{w}{w^*} \le H(M). \qquad \square$$