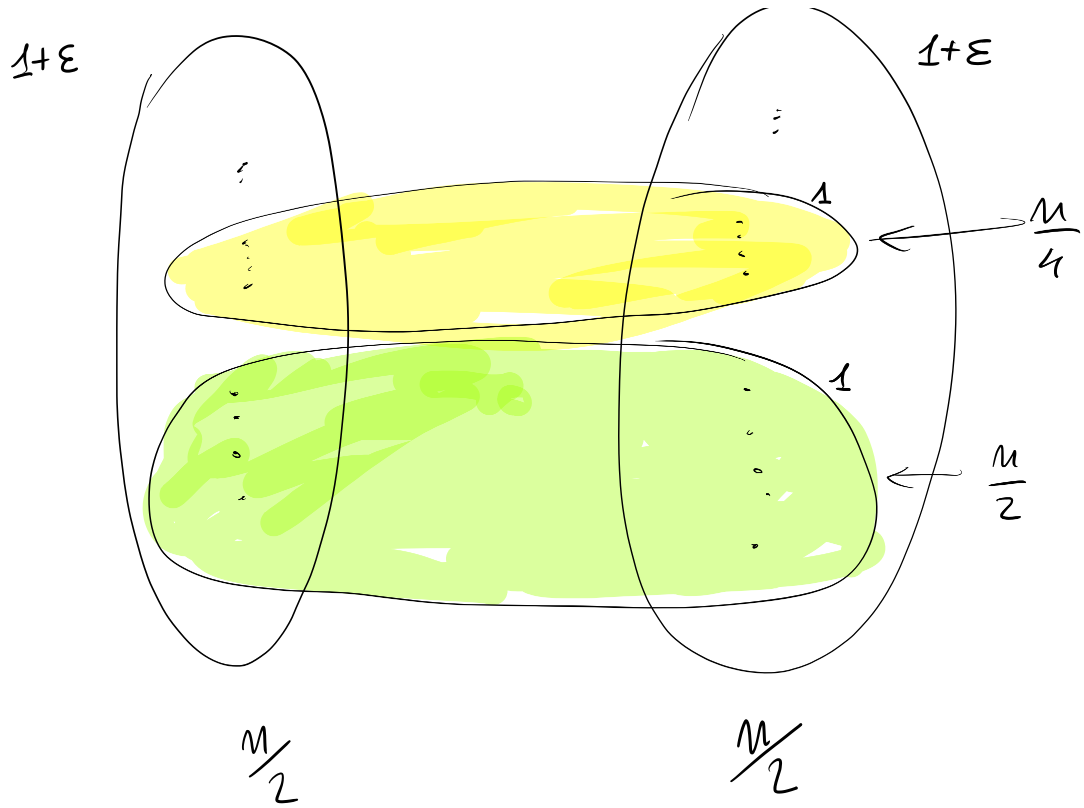
$$M = \max_i |S_i| \leq |U| = n$$

$$H(M) \leq H(n) = O(\ln n)$$

<u>Corollario</u>: GREEDY SET COVER fornisce una $O(\ln n)$-approssimazione.

Questa analisi è tight.



$w^* = 2+2\varepsilon$

$\frac{2}{n}$

$\frac{1}{n/4} = \frac{4}{n}$

$\frac{2+2\varepsilon}{n}$

$\frac{1+\varepsilon}{\frac{n}{2}-\frac{n}{4}} = \frac{4+4\varepsilon}{n}$

$\frac{\log n}{2+2\varepsilon}$

PROBLEMA DI VERTEX COVER

INPUT: $G = (V,E)$ grafo non orientato

$\langle w_i \in \mathbb{Q}^+ \rangle_{i \in V}$

SOL. AMM.: $X \subseteq V$ t.c.

$\forall e \in E$. $e \cap X \neq \emptyset$

FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in X} w_i$

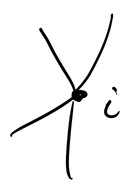
TIPO: MIN

$\widehat{\text{VERTEX COVER}} \leq_p \widehat{\text{SET COVER}}$

$? \left[\underbrace{G=(V,E), \langle w_i \rangle_{i \in V}}_{\exists \text{ vertex cover}} \right.$ di costo $\leq \overline{W}$

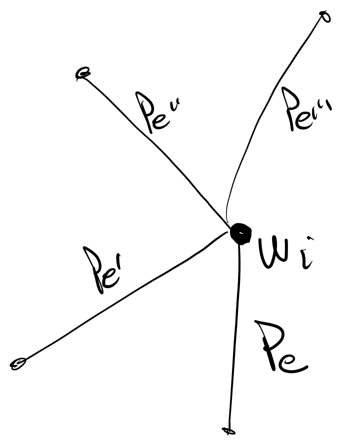
$\forall i \in V \left[\begin{array}{l} S_i = \{ e \in E \mid e \ni i \} \\ U = E \end{array} \right.$

$w_i = w_i$



Corollario: VERTEX COVER è $H(n)$-approssim.

PRICING TECHNIQUE



$\langle p_e \rangle_{e \in E}$

$$\sum_{e \text{ incidenti su } i} p_e > w_i$$

Def: Un $\langle p_e \rangle_{e \in E}$ è **equo** **sse** $\forall i \in V$

$$\sum_{e \text{ incidenti su } i} p_e \leq w_i$$

Lemma 1: Se $\langle p_e \rangle_{e\in E}$ è equo allora

$$\sum_{e\in E} p_e \le w^*$$

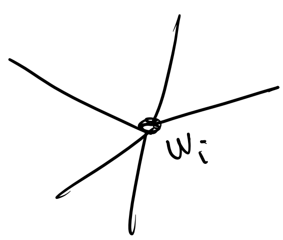
Dim:

$\forall i \in V$.
$$\boxed{\sum_{e \text{ incidente su } i} p_e \le w_i}$$

Sia $X^* \subseteq V$ la soluzione ottima

$$\sum_{e\in E} p_e \le \underbrace{\sum_{i\in X^*} \sum_{e \text{ incid. su } i} p_e}_{} \le \sum_{i \in X^*} w_i = w^*$$

$\square$



$$\sum_{e \text{ inc. su } i} p_e \le w_i$$

Def: $\langle p_e \rangle_{e\in E}$ è <u>stretta su i</u>

sse
$$\sum_{e \text{ inc. su } i} p_e = w_i$$

PRICE VERTEX COVER

$\forall e \in E$

$P_e \leftarrow 0$

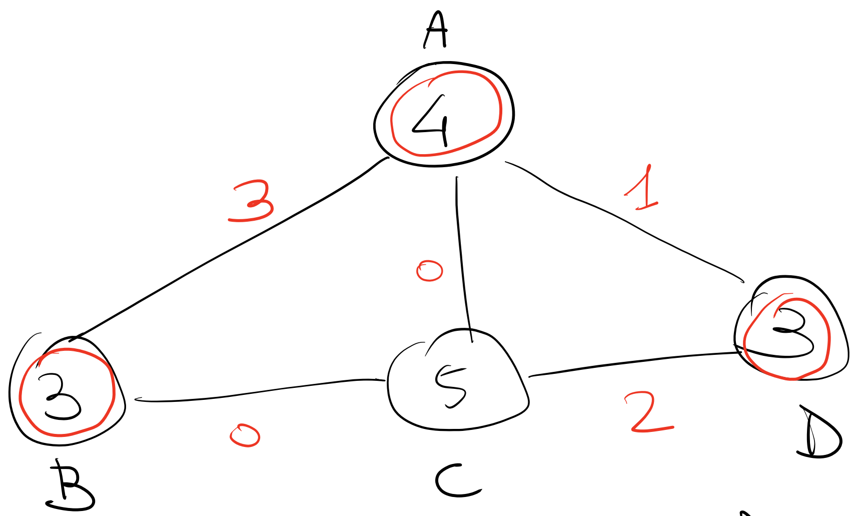
while $\exists e = \{i, j\} \in E$ t.c. $\langle P_e \rangle$ non è stretta né su i né su j

- sia $\bar{e} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ un tale lato

  $$\Delta \leftarrow \min\left(w_{\bar{i}} - \sum_{e \text{ inc. su } \bar{i}} P_e,\ w_{\bar{j}} - \sum_{e \text{ inc. su } \bar{j}} P_e\right)$$

  $$P_{\bar{e}} \leftarrow P_{\bar{e}} + \Delta$$

output i vertici su cui P_e è stretta



Lemma 2: Alla fine di PRICE SET COVER

$$w \leq 2 \sum_{e \in E} p_e$$

Dim:

$$w = \sum_{i \in X} w_i = \sum_{i \in X} \underbrace{\sum_{\substack{e \text{ inc.} \\ \text{su } i}} p_e}_{} \leq 2 \sum_{e \in E} p_e .$$

insieme dei vertici su cui $\langle p_e \rangle$ è stretta

$\square$

Teorema: PRICE VERTEX COVER dà una 2-approssimazione di VERTEX COVER.

Dim:

$$\frac{w}{w^*} \leq \frac{2 \sum_{e \in E} p_e}{w^*} \leq \frac{2 \sum_{e \in E} p_e}{\sum_{e \in E} p_e} = 2$$

Lemma 2   Lemma 1

$\square$