INDEPENDENT SET

INPUT: $G=(V,E)$ non orientato

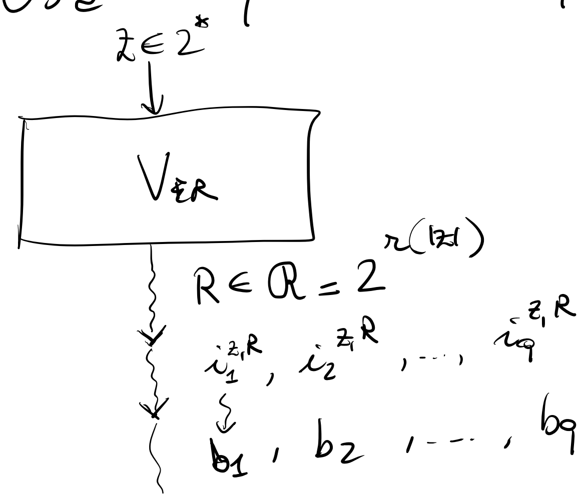
SOL. AMM: $X \subseteq V$ indipendenti
t.c. $\forall x,y \in X \quad \{x,y\} \notin E$

FUNZ. OBIETTIVO: $|X|$

TIPO: MAX

<u>Teorema</u>: Per ogni $\varepsilon > 0$, il problema INDEPENDENT SET non è $(2-\varepsilon)$-approssimabile a meno che $P = NP$.

<u>Dim</u>: $L \subseteq 2^*$ NP-completo
$\Rightarrow$ (PCP) esiste un verificatore Ver per L che usa $r(|z|) \in O(\log n)$ bit random e usa $q > 0$ query.



SI NO

$\boxed{\text{GRAFO}}$ G_z

- **Vertici** V = configurazioni di V_{ER} per z accettanti

$$C = (R_c, I_c, f_c)$$

$$R_c \in R = 2^{r(|z|)}$$

$$I_c \subseteq \mathbb{N} \qquad |I_c| = q \qquad I_c = \{i_1^{z,R_c}, \dots, i_q^{z,R_c}\}$$

$$f_c : I_c \to 2$$

- **Lati** $\{C, C'\} \in E$ sse

C e C' sono incompatibili, cioè

1) $R_c = R_{c'}$

oppure 2) $\exists i \in I_c \cap I_{c'}$ t.c.

$$f_c(i) \neq f_{c'}(i)$$

$$|V| = 2^{r(|z|)} \cdot 2^q = \underbrace{2^{O(\log|z|)}} \cdot \underbrace{2^q} = Poly(|z|)$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se $z \in L$, G_z ha un insieme indipendente di card. $\geq 2^{r(|z|)}$

Dim: $\exists\, w \in \Sigma^*$ t.c. VER accetta z con prob. 1 (cioè $\forall R \in \mathcal{R}$) se w è la stringa dell'oracolo.

(R_1, I_1, f_1)

(R_2, I_2, f_2)

$R \in \mathcal{R}$

(R_3, I_3, f_3)

Sono compatibili $=$ R_i sono distinti

$\left(|\mathcal{R}| = 2^{r(|z|)}\right) \Rightarrow$ Sono un insieme indip.

$\boxed{\quad}$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $z \notin L$, ogni insieme indipendente di G_z ha cardinalità $\leq 2^{r(|z|)-1}$

Dim: $X \subseteq V$ indipendente (compatibili)

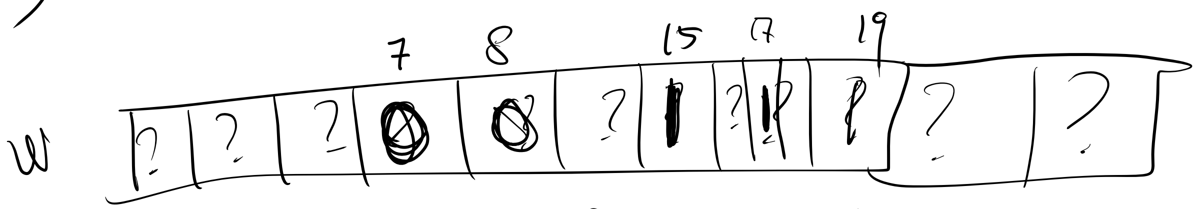
$|X| > 2^{r(|z|)-1}$

(R_1, I_1, f_1)

(R_2, I_2, f_2)

(R_3, I_3, f_3)

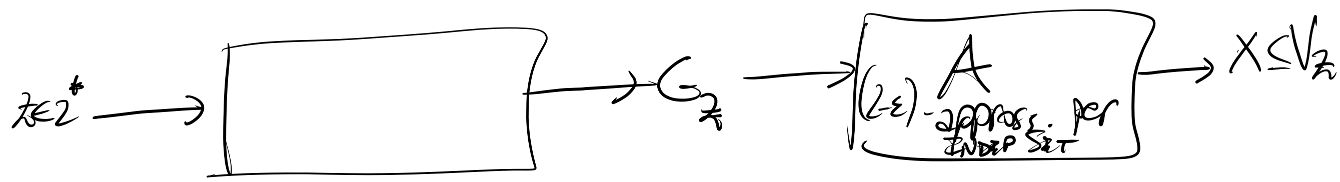
- $(R_1, \{7, 15, 19\}, \{7 \to 0, 15 \to 1, 19 \to 1\})$
- $(R_2, \{8, 15, 17\}, \{8 \to 0, 15 \to 1, 17 \to 1\}$



$\Rightarrow \exists w \in \Sigma^*$ che fa accettare

$\omega > 2^{\pi(|z|)-1} \Rightarrow$ prob. $> \frac{1}{2}$.

$\square$



$z \in L \Rightarrow \quad ind(G_z) \geq 2^{\pi(|z|)})$

output A $\geq \dfrac{2^{\pi(|z|)}}{2-\varepsilon} > 2^{\pi(z)-1}$

$z \notin L \Rightarrow \quad ind(G_z) \leq 2^{\pi(|z|)-1}$

output A $\leq 2^{\pi(|z|)-1}$

D

ALGORITMI VS. STRUTTURE DATI

N. Wirth: «Algoritmi + Strutture dati = Programmi»

ADT (Abstract Data Type)

Implementazione

$\boxed{\text{Stack<T>}}$

- new() costruttore
- boolean isEmpty()
- T top()
- void pop()
- void push(T x)

- S.push(x).top() == x
- S.push(x).pop().E = S.E

IMPLEMENTAZIONI

- Tempo
- $\boxed{\text{Spazio}}$ occupato

INFORMATION-THEORETICAL LOWER BOUND

Conseguenza del Teorema di codifica della sorgente di Shannon

- Per rappresentare v valori distinti servono non meno di $\log_2 v$ in media.

INFORM-TH. LOWER BOUND

x_1 bit

x_2 bit

$\vdots$

x_v bit

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{v} \geq \log_2 v$$

$$\cancel{x < \log_2 v}$$

$$\cancel{2^x < v}$$

$$[\log_2 v, \; 1 + \log_2 v)$$

STRUTTURE SUCCINTE

Consideriamo una struttura dati in cui i valori di taglia n siano V_n.

$$Z_n = \log V_n \qquad \text{INF. TH. L.B.}$$

Sia D_n il numero medio di bit per valori occupati dalla struttura di taglia n.

$$D_n \geq Z_n$$

La struttura dati si chiama

1) IMPLICITA se $D_n = Z_n + O(1)$

→ 2) SUCCINTA se $D_n = Z_n + o(Z_n)$

3) COMPATTA se $D_n = O(Z_n)$

(1) $Z_n + 3$ (2) $Z_n + \log Z_n$ (3) $4 Z_n$

STRUTTURE DI RANGO E SELEZIONE

$\underline{b} \in 2^{n}$

$rank_{\underline{b}}, \; select_{\underline{b}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

① $\forall p \leq n$

$rank_{\underline{b}}(p) = \left| \{ i \mid i < p \text{ e } b_i = 1 \} \right| = \sum_{i=0}^{p-1} b_i$

② $\forall k \leq rank_{\underline{b}}(n)$ (numero di uni in $\underline{b}$)

$select_{\underline{b}}(k) = \max \{ p \mid rank_{\underline{b}}(p) \leq k \}$

(A) $\forall k \quad rank_{\underline{b}}(select_{\underline{b}}(k)) = k$

(B) $\forall p \quad \underbrace{select_{\underline{b}}(rank_{\underline{b}}(p))}_{\text{posizione del primo 1} \geq p} \geq p$

$= \text{ sse } b_p = 1$

$\underline{b}$

0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	1	0	1

$n = 7$

p	$rank_{\underline{b}}(p)$
0	0
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4

k	$select_{\underline{b}}(k)$
0	1
1	2
2	4
3	6
4	7

posizione del 1

$\underline{b} =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

$$select_{\underline{b}}\left(rank_{\underline{b}}(5)\right) =$$

$$= select_{\underline{b}}(2) = 8$$