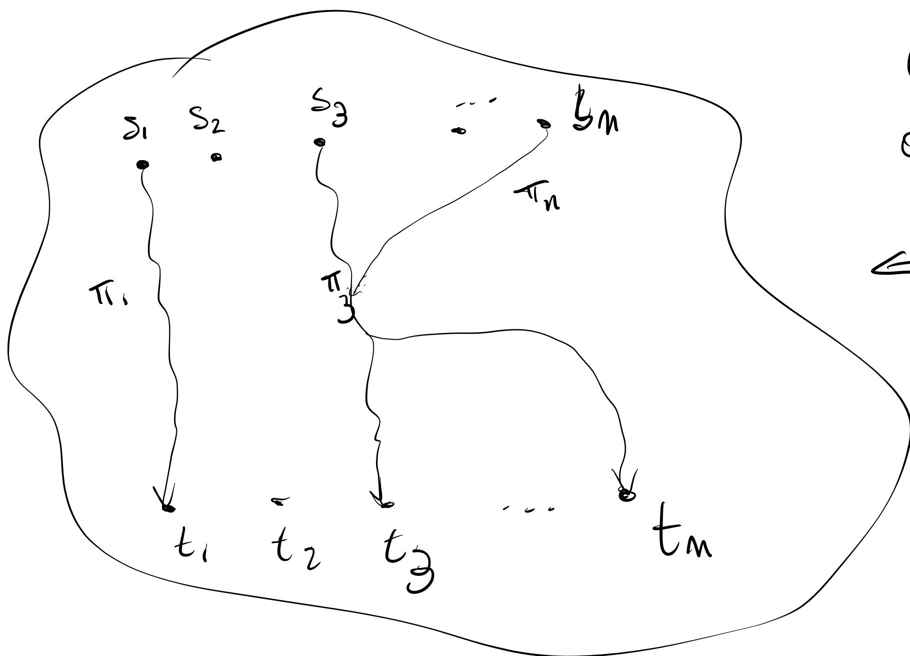
DISJOINT PATHS



G orientato

NESSUN ARCO VIENE USATO PIÙ DI c VOLTE

INPUT: $G=(V,E)$ orientato e
$s_0, \dots, s_{k-1}$, $t_0, \dots, t_{k-1} \in V$
e $c \in \mathbb{N}^+$

SOLUZIONI AMM.: $I \subseteq k$
e $\forall i \in I$, un cammino $\pi_i : s_i \rightsquigarrow_G t_i$
t.c. $\forall a \in E$. i cammini π_i
che passano per a sono $\le c$

FUNZ. OBIETTIVO: $|I|$

TIPO: MAX

$$\ell : E \to \mathbb{R}^+$$

$$\ell(\pi) = \ell(\langle x_1, x_2, \dots, x_t \rangle) \triangleq$$

$$\triangleq \ell(x_1, x_2) + \ell(x_2, x_3) + \dots + \ell(x_{t-1}, x_t)$$

PRICING DISJOINT PATHS $[\beta > 1]$

INPUT: $G = (V, E)$, $s_0, \dots, s_{k-1}, t_0, \dots, t_{k-1} \in V$
e $c \in \mathbb{N}^+$

- $\forall a \in E$ $\quad \ell(a) \leftarrow 1$
- $I \leftarrow \emptyset$ // insieme di indici collegati
- $P \leftarrow \emptyset$ // insieme di cammini usati
- forever {
  - find the shortest path π connecting (s_i, t_i) with $i \notin I$ (w.r.t. ℓ)
  - if $\nexists$, break
  - $I \leftarrow I \cup \{i\}$
  - $P \leftarrow P \cup \{\pi\}$
  - for all $a \in \pi$
    - $\ell(a) \leftarrow \ell(a) * \beta$
    - if a is used c times
      - delete a

  }
- output I, P

Def: Data $\ell(-)$, un cammino π è **corto** sse $\ell(\pi) < \beta^c$

Consideriamo l'istante successivo all'aggiunta dell'ultimo cammino corto.

Sia
- $\bar{\ell}$ la funzione ℓ in quel momento
- $\bar{I}$ l'insieme I in quel momento

Lemma 1. Sia $i \in I^* \setminus \bar{I}$. Allora

$$\bar{\ell}(\pi_i^*) \geq \beta^c.$$

(Se fosse $\bar{\ell}(\pi_i^*) < \beta^c$, lo aggiungerei prima di procedere oltre)

Lemma 2:

$$\sum_{a \in E} \bar{\ell}(a) \leq \beta^{c+1} |\bar{I}| + m$$

Dim: $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{t-1} = \bar{\ell}$ le funzioni ℓ durante l'esecuzione dell'alg.

$$\sum_{a \in E} \ell_0(a) = m$$

VAL INIZIALE

$$\ell_j \overset{\pi}{\rightsquigarrow} \ell_{j+1}$$

$$\ell_{j+1}(a) = \overset{\pi}{\begin{cases} \ell_j(a) & a \notin \pi \\ \ell_j(a)\,\beta & a \in \pi \end{cases}}$$

$$\sum_{a\in E} l_{j+1}(a) - \sum_{a\in E} l_j(a) =$$

$$= \sum_{a\in\pi} (\beta-1)\, l_j(a) \leq \beta \underbrace{\sum_{a\in\pi} l_j(a)} = \beta l_j(\pi) \leq \beta^{c+1}$$

INER.

$\square$

Osservazione:

① $$\sum_{i\in I^*\setminus I} \bar{l}(\pi_i^*) \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} \beta^c \,|I^*\setminus I|$$

② $$\sum_{i\in I^*\setminus I} \bar{l}(\pi_i^*) \leq c \sum_{a\in E} \bar{l}(a) \leq$$

$$\underset{\text{Lemma 2}}{\leq} c\left(\beta^{c+1}\,|I| + m\right)$$

Quindi

$$\beta^c\,|I^*| = \beta^c\,|I^*\setminus I| + \beta^c\,|I^*\cap I| \overset{①}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i\in I^*\setminus I} \bar{l}(\pi_i^*) + \beta^c\,|I| \overset{②}{\leq}$$

$$\leq c\left(\beta^{c+1}\,|I| + m\right) + \beta^c\,|I| \leq$$

$$\leq c\left(\beta^{c+1}\,|I| + m\right) + \beta^c\,|I|$$

Dividiamo per β^c

$$|I^*| \leq c\beta |I| + c\beta^{-c} m + |I| \leq$$

$$\leq c\beta |I| + c\beta^{-c} m |I| + |I|$$

Dividiamo per $|I|$

$$\frac{|I^*|}{|I|} \leq c\beta + c\beta^{-c} m + 1 =$$

$$= c\left(\beta + \frac{m}{\beta^c}\right) + 1 .$$

Scegliendo $\beta = m^{\frac{1}{c+1}}$

$$c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{\frac{-c}{c+1}} \cdot m\right) + 1 =$$

$$= c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{\frac{1}{c+1}}\right) + 1 =$$

$$= \boxed{2cm^{\frac{1}{c+1}} + 1}$$

c	
1	$2\sqrt{m} + 1$
2	$4\sqrt[3]{m} + 1$
3	$6\sqrt[4]{m} + 1$
...	...

Teorema: PRICING DISJOINT PATHS fornisce una $(2cm^{\frac{1}{c+1}}+1)$-approssim. per DISJOINT PATHS (se si usa $\beta = m^{\frac{1}{c+1}}$).