$\boxed{\text{PROGRAMMAZIONE LINEARE}}$ (LP)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots \end{cases}$$

$$\min \quad c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

LP

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$

SOL. AMM.: $\underline{x} \in \mathbb{Q}^n$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$

TIPO: MIN

- Karmakar (1981)

$$LP \in PO$$

ILP

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$

SOL. AMM.: $\underline{x} \in \mathbb{N}^n$

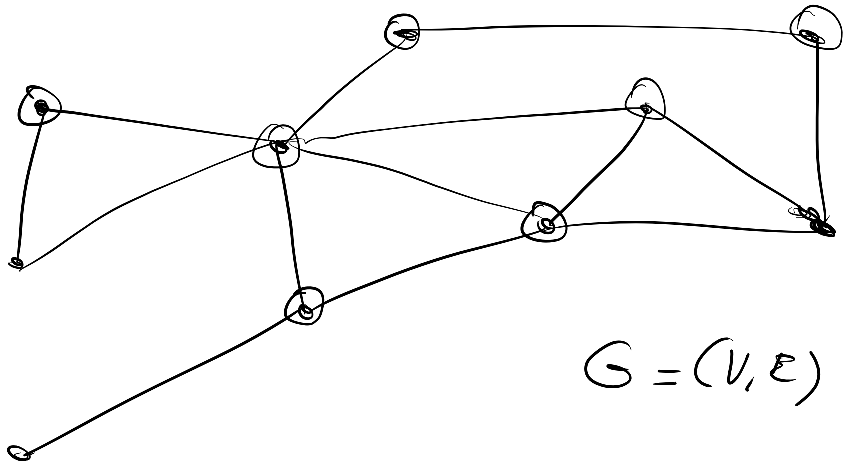
$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$

TIPO: MIN

ILP è NPO-completa

Vertex Cover



$G = (V, E)$

$X \subseteq V$

t.c. $\forall e \in E \quad e \cap X \neq \emptyset$

$i \in V$

x_i

$$
ILP(G) \quad \begin{cases} x_i \geq 0 & \forall i \in V \\ x_i \leq 1 & \forall i \in V \\ x_i + x_j \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \end{cases}
$$

$$
w = \min \sum_{i \in V} w_i x_i
$$

$\underline{x}^*_{ILP} \qquad w^*_{ILP}$

$LP(G)$

$\underline{x}^*_{LP} \qquad w^*_{LP}$

Lemma 1: $w^*_{LP} \leq w^*_{ILP}$.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } (x^*_{LP})_i \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall \{i,j\} \in E$

$$x_i + x_j < 1 \Rightarrow x_i = x_j = 0$$

$$\Rightarrow (x^*_{LP})_i < \frac{1}{2} \quad (x^*_{LP})_j < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x^*_{LP})_i + (x^*_{LP})_j < 1$$

IMPOSS.

$$\Rightarrow x_i + x_j \geq 1$$

$\Rightarrow \underline{x}$ è ammissibile per ILP(G)

$\forall i$ $\quad x_i \leq 2(x^*_{LP})_i$

ovvio

$x_i = 0$

$x_i = 1 \Rightarrow (x^*_{LP})_i \geq \frac{1}{2}$

$$2(x^*_{LP})_i \geq 1 = x_i$$

(*)

Lemma 2: $\displaystyle\sum_{i \in V} w_i x_i \leq 2(W_{LP})^*$

Dim: $\displaystyle\sum_{i \in V} w_i x_i \overset{(*)}{\leq} 2 \underbrace{\sum_{i \in V} w_i (x_{LP})^*_i} = 2(W_{LP})^*$. $\square$

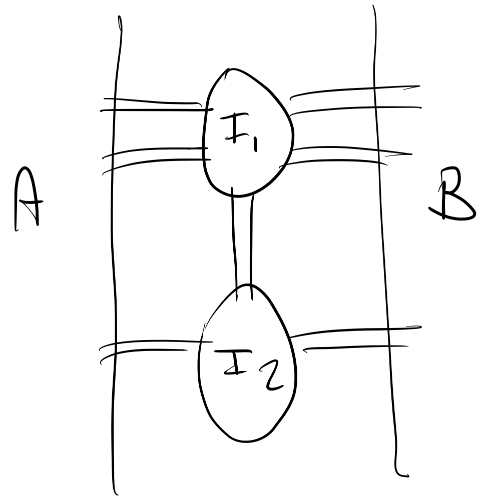
Thm: L'insieme $\{i \mid x_i = 1\}$ è una 2-approssimazione per VERTEX COVER

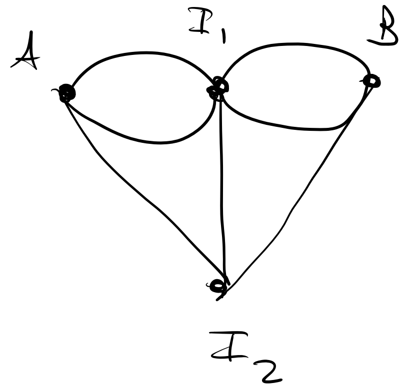
Dim:

$$W \le 2\, W_{LP}^* \le 2\, W_{ILP}^*$$

$$\frac{W}{W_{ILP}^*} \le 2 \qquad \square$$

ALGORITMO DI CHRISTOFIDES PER IL TSP METRICO

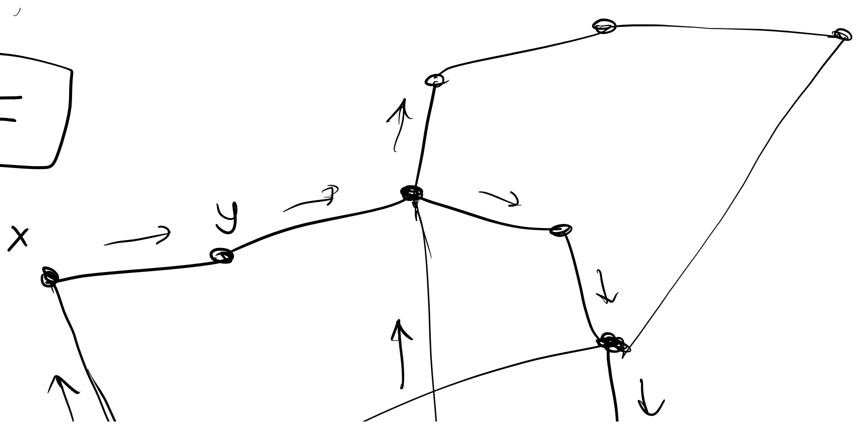


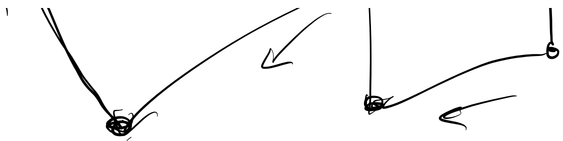


Circuito euleriano = cammino chiuso che percorre tutti i lati esattamente una volta

Thm: G ammette un circuito euleriano <u>sse</u> è connesso e tutti i vertici hanno grado pari.

Dim: $\boxed{\Leftarrow}$





$\square$

Lemma delle strette di mano:

Il numero di persone che stringono le mani a un numero dispari di individui è pari.

Dim:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m \qquad \square$$

Teorema degli amici e degli sconosciuti.

In una cena di almeno 6 persone, almeno tre sono amici sconosciuti
o almeno tre sono

$\boxed{\text{TSP}}$ (Travelling Salesman Problem)

<u>INPUT</u>: $G=(V,E)$ non orientato

$\delta_e \in \mathbb{Q}^+$ $\quad \langle \delta_e \rangle_{e\in E}$

<u>SOL. AMMISSIBILI</u>: circuiti hamiltoniani π (passa da tutti i vertici una sola volta)

<u>FUNZ. OBIETTIVO</u>: $\delta = \sum_{e\in\pi} \delta_e$

<u>TIPO</u>: MIN

δ_e

$$G=(V,E) \downarrow K_V = \left(V, \binom{V}{2}\right)$$

$$\bar{\delta}_e = \begin{cases} \delta_e & \text{se } e\in E \\ M & \text{altri} \end{cases}$$

$$M = 1 + \sum_{e\in E} \delta_e$$

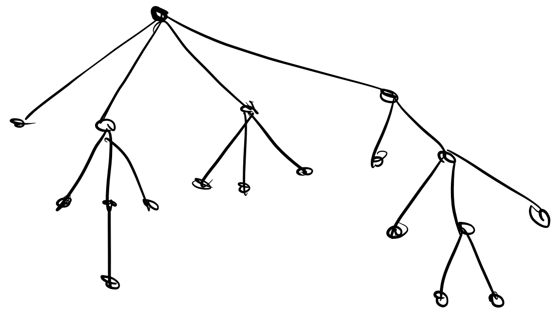
$\Rightarrow$ CONSIDEREMO <u>SOLO</u> TSP SU CLIQUE

$\boxed{\text{TSP METRICO}}$

$\forall i,j,k \in V$

$$\delta_{ij} \le \delta_{ik} + \delta_{kj}$$

MINIMUM SPANNING TREE



$|\text{lati}| = |\text{vertici}| - 1$

Albero = grafo non orientato ~~connesso~~ e privo di cicli

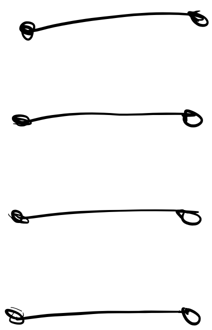
- Dato un grafo connesso e pesato sui lati, trovare una scelta di lati che

MST
1) sia un albero
2) tocchi tutti i vertici
3) peso complessivo minimo

si può trovare in tempo polinomiale.

MINIMUM-WEIGHT PERFECT MATCHING

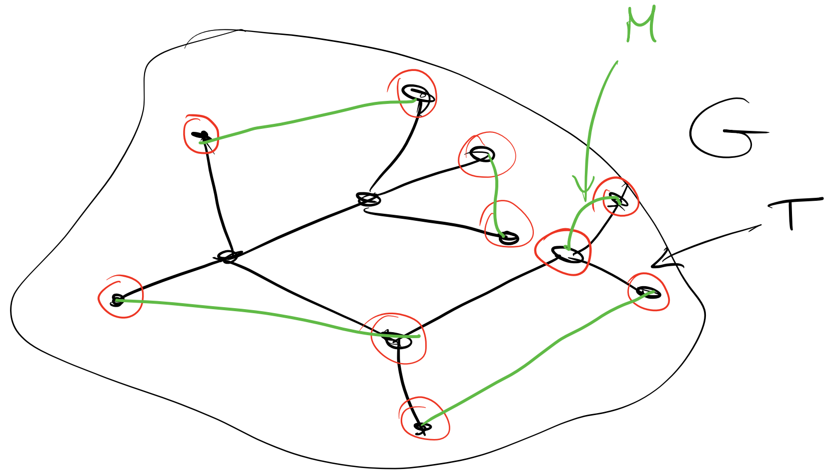
Data una clique pesata (sui lati) con un numero pari di vertici, è possibile trovare un perfect matching



di peso minimo

in tempo polinomiale. ("Blooming Algorithm")

ALGORITMO DI CHRISTOFIDES (PER TSP METRICO SU CLIQUE)

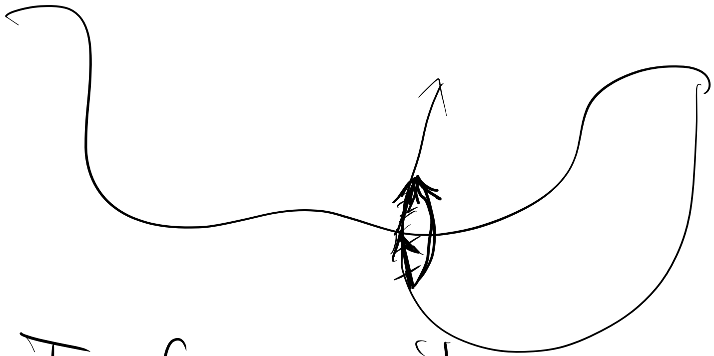


1) Trovare un MST T

2) Sia $D \subseteq V$ t.c. $x \in D$ ha grado dispari in T.
$\Rightarrow |D|$ è pari (Handshake Lemma)

3) Troviamo un minimum-weight perfect matching M su D.

4) In $T \cup M$ tutti i vertici hanno grado pari
$\Rightarrow$ trovo un cammino euleriano



5) Trasformo il cammino euleriano in uno hamiltoniano con le scorciatoie

Lemma 1: $\delta(T) \leq \delta^*$

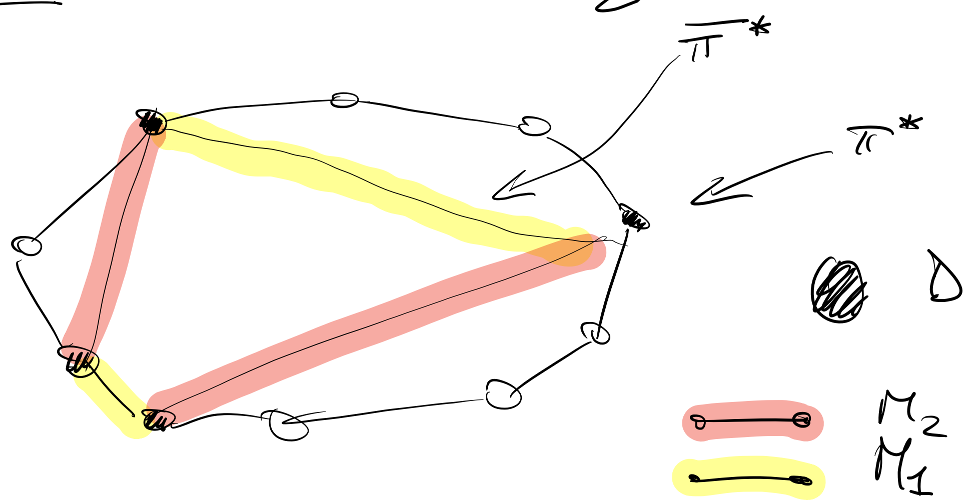
Dim: $\delta^* = \delta(\pi^*)$ circuito hamiltoniano

$\pi^* - e$ è un albero di cop.

$\delta(T) \leq \delta(\pi^*) - \delta_e \leq \delta^*$. $\square$

Lemma 2: $\delta(M) \leq \frac{1}{2}\delta^*$.

Dim:



$$\delta(\overline{\pi}^*) \le \delta^* \quad \text{(triangolare)}$$

$$\delta(M) \le \min(\delta(M_1), \delta(M_2))$$

$$2\delta(M) \le \delta(M_1) + \delta(M_2) =$$

$$= \delta(\overline{\pi}^*) \le \delta^*$$

$$\Rightarrow \delta(M) \le \frac{\delta^*}{2}. \qquad \square$$