$\boxed{\text{PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE}}$ Π

1) $I_\pi \subseteq \{0,1\}^*$ input (istanze)

2) $Amm_\pi : I_\pi \longrightarrow 2^{2^*} \setminus \{\emptyset\}$

3) Funzione obiettivo

$c_\pi : I_\pi \times 2^* \longrightarrow \mathbb{N}$

4) $T_\pi \in \{MIN, MAX\}$

$$\begin{tikzcd}
x \in I_\pi \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{Amm_\pi(x)} \arrow[d, "y"] \\
 & \underline{c_\pi(x, y)}
\end{tikzcd}$$

$y^* \begin{cases} MIN \\ MAX \end{cases}$

$\boxed{\text{MAX SAT}}$

- **Input**: formule logiche in CNF

→ $(x_7 \underset{1}{\vee} \neg x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_5 \underset{1}{\vee} \neg x_7) \wedge (x_3 \underset{1}{\vee} \neg x_1)$

- **Soluzioni ammissibili**: assegnamenti di valori di verità delle variabili che compaiono nella formula

x_1	0
x_2	0
x_3	⋮
x_4	⋮
x_5	
x_7	0

- **Funzione obiettivo**: numero di clausole rese vere
- **Tipo**: MAX

Def: Dato un p.o. Π, e $x \in I_\Pi$

$y^*(x) \in Amm_\Pi(x)$. t.c. $\forall \bar{y} \in Amm_\Pi(x)$.

$$c_\Pi(x, y^*(x)) \begin{cases} \geq c_\Pi(x, \bar{y}) & T_\Pi = MAX \\ \leq c_\Pi(x, \bar{y}) & T_\Pi = MIN \end{cases}$$

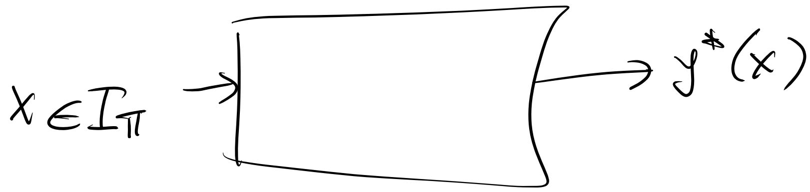
Def: Dato $x \in I_\Pi$, $y \in Amm_\Pi(x)$

$$R_\Pi(x, y) = \max \left\{ \frac{c_\Pi(x, y)}{c_\Pi(x, y^*(x))}, \frac{c_\Pi(x, y^*(x))}{c_\Pi(x, y)} \right\}$$

Rapporto di approssimazione della sol. y per input x

CLASSE PO

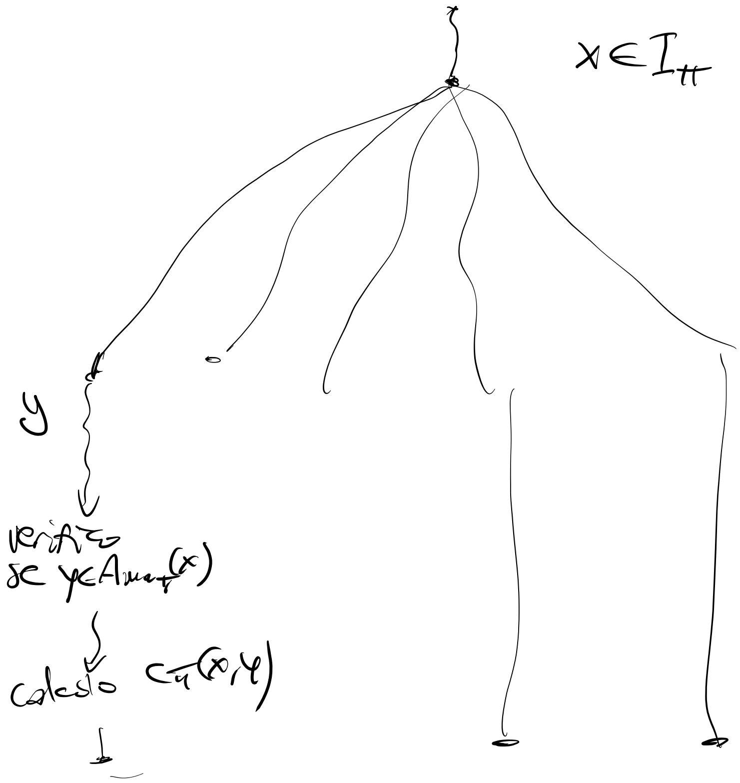
PO = classe di p.o. in cui $y^*(x)$ è calcolabile in tempo polinomiale deterministico



CLASSE NPO

$\Pi \in NPO$ sse

1) $I_\Pi \in P$
2) Esiste un polinomio Q t.c.
   - $\forall x \in I_\Pi \quad \forall y \in Amm_\Pi(x)$
     $|y| \leq Q(|x|)$
   - $\forall x \in I_\Pi \quad \forall y \in 2^*$
     se $|y| \leq Q(|x|)$, si può
     decidere se $y \in Amm_\Pi(x)$
     in tempo polinomiale in $|x|$
3) c_Π è calcolabile in
   tempo polinomiale



genero tutte
le sequenze
$y \in \Sigma^*$ t.c.
$|y| \leq Q(|x|)$

PROBLEMA DI DECISIONE ASSOCIATO

Dato un p.o. Π, definisco $\hat{\Pi}$ (problema di decisione)

$$I_{\hat{\Pi}} = I_{\Pi} \times \mathbb{N}$$

e

$$(x, k) \rightsquigarrow \text{SI} \quad \underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} C_{\Pi}(x, y^*(x)) \leq k & \text{per } T_{\Pi} = \text{MIN} \\ C_{\Pi}(x, y^*(x)) \geq k & \text{per } T_{\Pi} = \text{MAX} \end{cases}$$

$\widehat{\text{MAX SAT}}$

NPO-completo = $\{ \Pi$ p.o. $|$ $\Pi \in NPO$ e
$\hat{\Pi} \in$ NP-completo $\}$

Teorema: se $\Pi \in$ NPO-completo,
$\Pi \notin PO$ (se $P \neq NP$)

Dim: Per assurdo, supponiamo che $\Pi \in$ NPO-completo e $\Pi \in PO$. S.p.g. $T_\Pi = MAX$.

INPUT: $(x, k) \in I_\Pi \times N$

- Calcola $y^*(x)$ (in tempo pol., perché $\Pi \in PO$)
- Calcola $c_\Pi(x, y^*(x))$
- Se $k \leq c_\Pi(x, y^*(x))$ output SI

altrimenti output NO

è un alg. polinomiale per $\hat{\Pi}$.
Ma $\hat{\Pi}$ è NP-completo, e quindi è impossibile (a meno che $P = NP$).

$\square$

Teorema: $\text{MaxSat} \in$ NPO-completo.

Dim: $\cdot$ $\widehat{\text{MaxSat}} \in$ NPO

$\cdot$ $\widehat{\text{MaxSat}}$ è NP-completo.

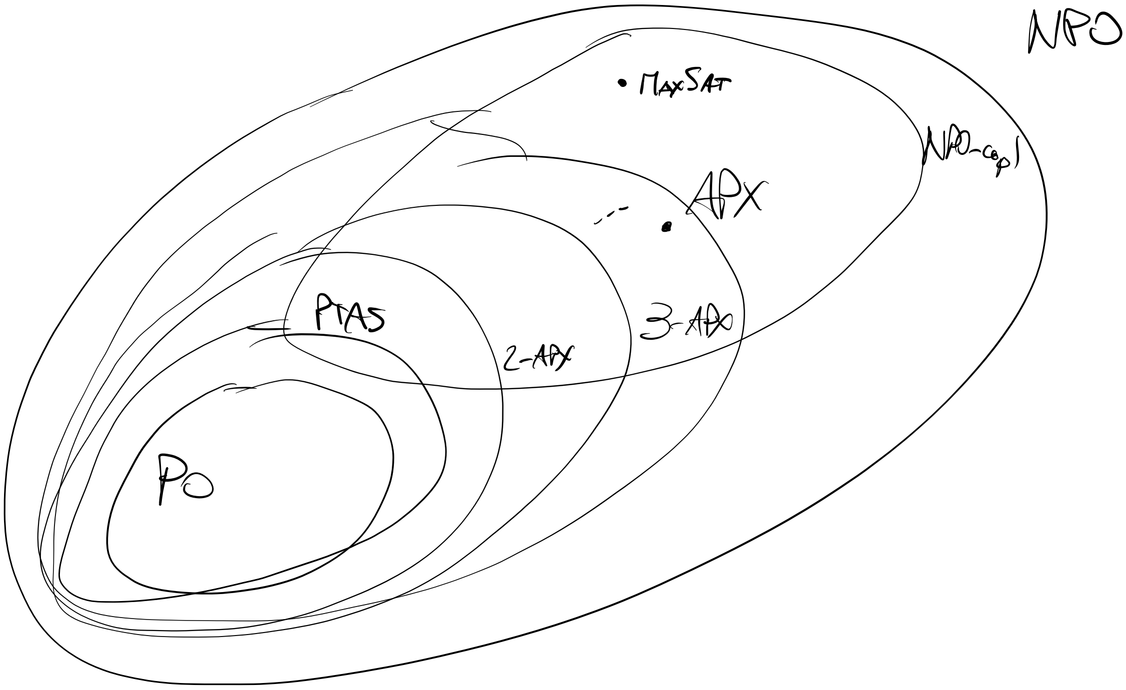
$$\text{SAT} \leq_p \widehat{\text{MaxSat}}$$

$$\varphi \quad \text{CNF}$$

$$\downarrow$$

$$(\varphi, \#\text{clausole di } \varphi) . \qquad \square$$

Corollario: $\text{MaxSat} \notin$ PO.



& $P \neq NP$

$\boxed{r\text{-APX}}$ $(r \geq 1)$

r-APX $= \{ \Pi$ p.o. $|$ esiste un alg. che dato $x \in I_\Pi$ trova $y \in Amm_\Pi(x,y)$ in tempo pol. e t.c. $R_\Pi(x,y) \leq r \}$

$$APX = \bigcup_{r \geq 1} r\text{-APX}$$

$\boxed{PTAS}$

PTAS $= \{ \Pi \in$ p.o. $|$ esiste un alg. che dato $x \in I_\Pi$ e $\varepsilon > 1$, in tempo polinomiale $|x|$, trova $y \in Amm_\Pi(x)$ con $R_\Pi(x,y) \leq \varepsilon \}$