PROPRIETÀ

- Disuguaglianza di Boole (union bound):

$$P\left[\bigcup_i \mathcal{E}_i\right] \leq \sum_i P[\mathcal{E}_i]$$

- Disuguaglianza di Markov:
  per ogni v.a. X non negativa con valore atteso finito, e per ogni $\alpha > 0$

$$P[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

SET COVER

INPUT: $S_1, S_2, \dots, S_m$ $\quad \bigcup_{i=1}^{m} S_i = U$

$w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{Q}^+$

SOL. AMMISSIBILI: $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ t.c.

$$\bigcup_{i \in I} S_i = U$$

FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in I} w_i$

TIPO: MIN

~~ILP~~

LP

$\hat{\Pi}$

$$\begin{cases} \min \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m & x_1, \dots, x_m \\ \begin{cases} x_i \geq 0 \\ x_i \leq 1 \end{cases} & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i : u \in S_i} x_i \geq 1 & \forall u \in U \end{cases}$$

$n = |U|$ $\quad k \in \mathbb{N}^+$ parametro

$\boxed{\text{ALGORITMO}}$

- Dato un input per SET COVER
  - ↳ Costruire $\hat{\Pi}$ e risolverlo: sia $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ la soluzione
- $I \leftarrow \emptyset$

for $t = 1, \dots, \lceil k + \ln n \rceil$

    for $i = 1, \dots, m$

        con probabilità $\hat{x}_i$ aggiungiamo i a I

Output I

Teorema 1: L'algoritmo produce una soluzione ammissibile con probabilità $\geq 1 - e^{-k}$

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^{m} w_i \hat{x}_i$$

Dim: $\hat{\Pi} \rightsquigarrow \hat{x}_i$

Il problema originale ha una soluzione ottima $v^* \geq \hat{v}$.

Definisco:

$\mathcal{E}_u$ = l'elemento u non è coperto

$$P[\text{sol. ammissibile}] =$$
$$= 1 - P[\text{qualche elemento dell'universo non sia coperto}] =$$
$$= 1 - P\Big[\bigcup_{u \in U} \mathcal{E}_u\Big] \geq$$
$$\geq 1 - \sum_{u \in U} P[\mathcal{E}_u] =$$

$$P[i \notin I] = (1 - \hat{x}_i)^{k + \ln n}$$

$1 - x \leq e^{-x}$

$$= 1 - \sum_{u \in U} \prod_{i : u \in S_i} (1 - \hat{x}_i)^{k + \ln n} \geq$$
$$= 1 - \sum_{u \in U} \prod_{i : u \in S_i}$$

$$\geq 1 - \sum_{u \in U} \prod_{i : u \in S_i} e^{-\hat{x}_i (k + \ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{u \in U} e^{-(k+\ln n) \sum_{i: u \in S_i} \hat{x}_i} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{u \in U} e^{-(k + \ln n)} = 1 - n e^{-k} e^{-\ln n} =$$

$$= 1 - \cancel{n} e^{-k} \frac{1}{\cancel{n}} = 1 - e^{-k}$$

$\square$

Teorema 2: Per ogni $\alpha > 0$:

$$P[\text{fatt. approssimazione} \geq \underbrace{\alpha(k + \ln n)}] \leq \frac{1}{\alpha}$$

Dim:

$$E[v] = E\left[\sum_{i=1}^{m} w_i [i \in I]\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w_i \, E[i \in I] = \sum_{i=1}^{m} w_i \, P[i \in I] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} w_i \hat{x}_i (k + \ln n) =$$

$$= (k + \ln n) \sum_{i=1}^{m} w_i \hat{x}_i = \hat{v}(k + \ln n) \leq$$

$$\leq v^* (k + \ln n)$$

$$\boxed{P[i \in I] \underset{\text{union bound}}{\leq} \hat{x}_i (k + \ln n)}$$

$(\rightarrow)$ $$P[X \geq \beta] \leq \frac{E[X]}{\beta}$$

La usiamo per $X = \frac{v}{v^*}$ e $\beta = \alpha(k + \ln n)$

$$P\left[\frac{v}{v^*} \geq \alpha(k+\ln n)\right] \leq \frac{E\left[\frac{v}{v^*}\right]}{\alpha(k+\ln n)} \leq \frac{\frac{v^*(k+\ln n)}{v^*}}{\alpha(k+\ln n)} = $$

$$= \frac{1}{\alpha} \qquad \square$$

Corollario: Con $k=3$, c'è il 45% di probabilità di avere una sol. ammissibile con rapp. approssimazione $\leq 6 + 2\ln n$

Dim: $\mathcal{E}_{non-amm}$ = l'algoritmo emette una sol. ammissibile

$\mathcal{E}_{non-ott}$ = l'algoritmo emette una sol. con rapp. $> 6 + 2\ln n$

$$P[\mathcal{E}_{non-amm}] \leq e^{-3} \leq 0.04978 \quad \left(\text{Teor. } 1, \; k=3\right)$$

$$P[\mathcal{E}_{non-ott}] \leq \frac{1}{2} \quad \left(\text{Teor. } 2 \text{ con } \alpha = 2 \text{ e } k=3\right)$$

$$P[ok] = 1 - P[\mathcal{E}_{non-amm} \vee \mathcal{E}_{non-ott}] \overset{\text{union bound}}{\geq}$$

$$= 1 - \left(e^{-3} + \frac{1}{2}\right) = 0.4502129 \geq 45\%$$