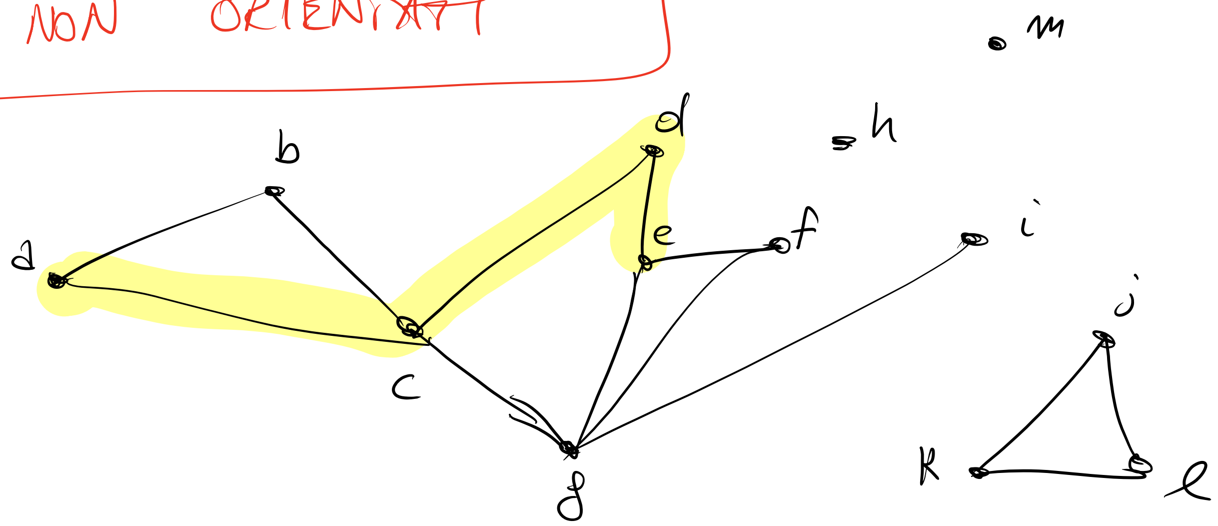
NOTAZIONI PER GRAFI NON ORIENTATI



$G = (V, E)$

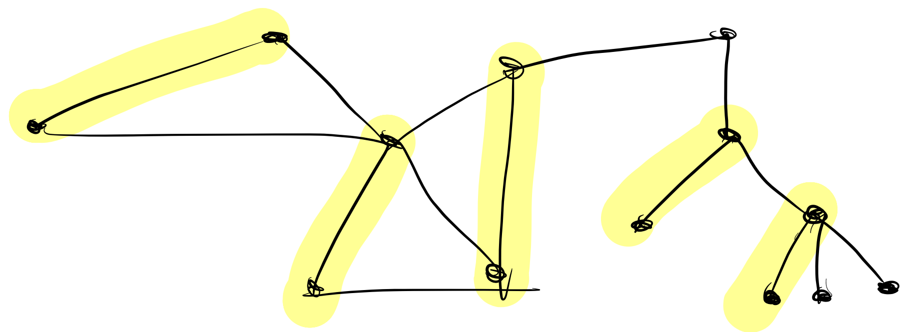
V ins. vertici

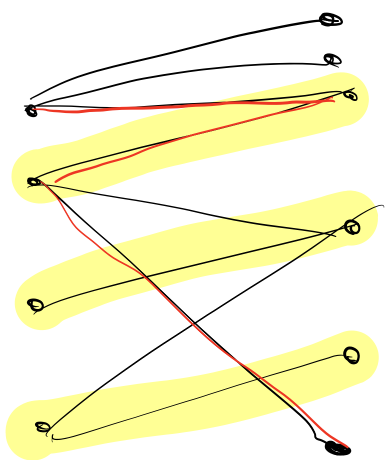
$E \subseteq \binom{V}{2}$ ins. lati

$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \ldots$

$d_G(x)$

BiMax Matching





$M \subseteq E$

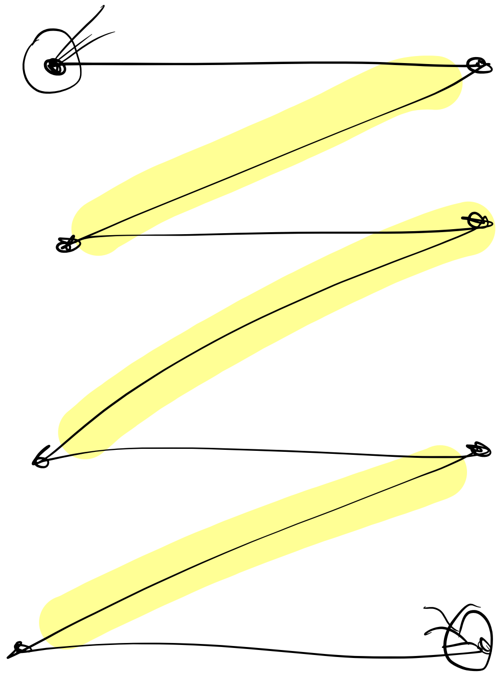
fissato

lato
- occupato $\in M$
- libero $\notin M$

vertice esposto = su di esso incidono solo lati liberi

CAMMINO AUMENTANTE:

cammino che alterna lati liberi e lati occupati e che inizia e termina su un vertice esposto

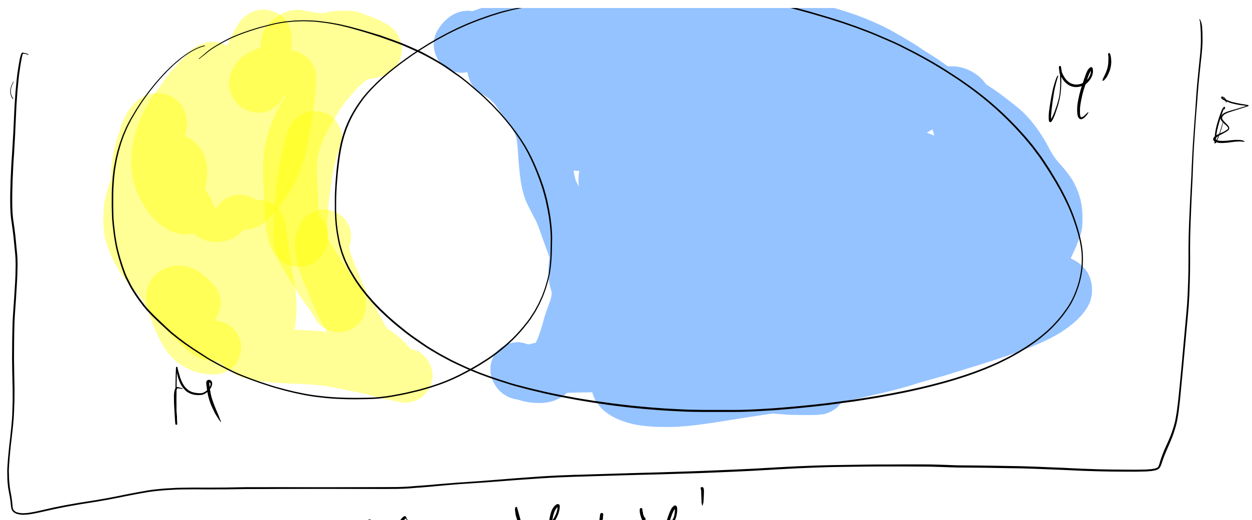


Teorema: Esiste un cammino aumentante per M <u>sse</u> M non è massimo.

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Il flip del cam. aumentante increm. la cardinalità.

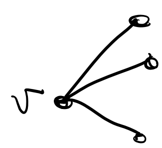
$\boxed{\Leftarrow}$ M matching non massimo

M' matching massimo

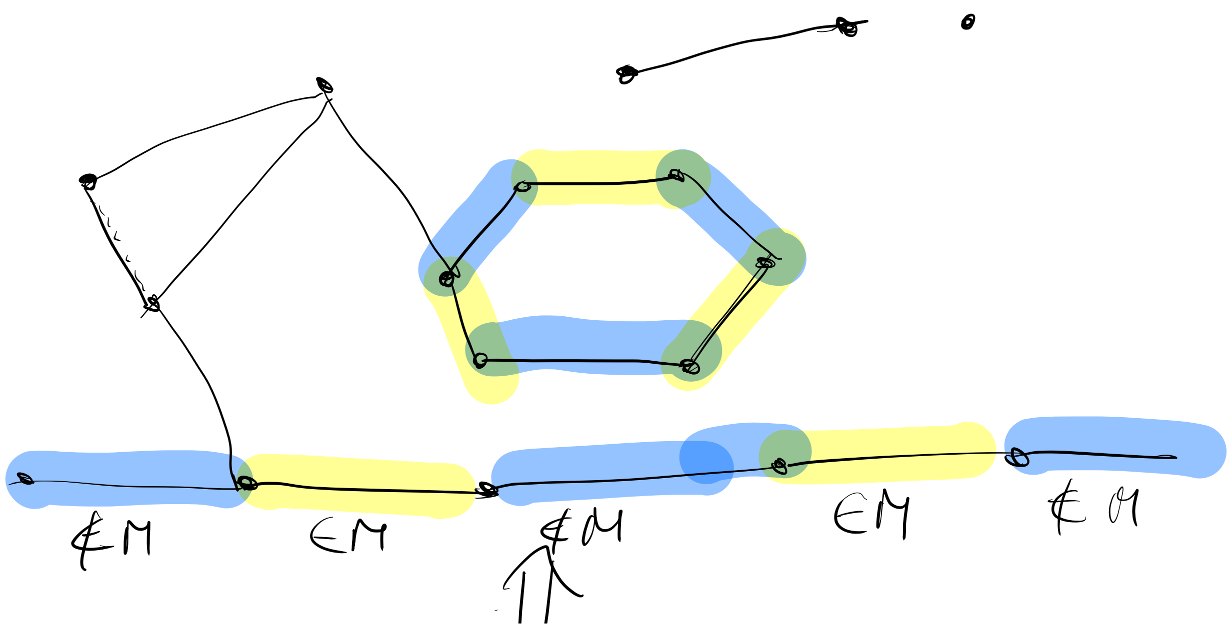


$$X = M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$$

1) Nessun vertice può avere più di due lati di X incidenti



2) $\Rightarrow$ su ciascun vertice incidono $0, 1, 2$ lati di X



Il cammino aumentante

ALGORITMO

$M \leftarrow \emptyset$
<u>while</u> (<u>true</u>) {
    $\pi \leftarrow$ FINDAUGMENTING(G, M)
    <u>if</u> $\pi = \perp$
        <u>return</u> M
    <u>else</u>
        flip(π)
}

<u>FINDAUGMENTING (G, M)</u>

1) tenere traccia dei vertici esposti
2) fare una visita in profondità del grafo a partire dai v. esp.
[illegible]

$\boxed{\text{MAX MATCHING}}$

- INPUT: $G=(V,E)$ non orientato
- SOL. AMM: $M \subseteq E$ t.c. $\forall x \in V$ se $e, e' \in M$ che incidono su $x \Rightarrow e = e'$
- FUNZ. OB.: $|M|$
- TIPO: MAX

VISITE (GENERICHE) DI GRAFI

BIANCO → sconosciuto

GRIGIO → conosciuto, non visitato

NERO → visitato

$\boxed{s \in V \text{ sorg. di visita}}$

- colora tutti i vertici di BIANCO
- colora s di grigio
  $D = \{s\}$
- <u>while</u> $D \neq \emptyset$ {
  - estrai x da D
  - visita (x)
  - colora x di nero
  - <u>for</u> $\forall y$ vicini di x
    <u>if</u> y è bianco
    - colora y di grigio
    - $D = D \cup \{y\}$

}

Corollario: (Bi) MAX MATCHING $\in$ PO.

PERFECT MATCHING: dato un grafo G, esiste un matching che coinvolge tutti i vertici?

Corollario: PERFECT MATCHING $\in$ P.

LOAD BALANCING

$\in$ NPO-completo

INPUT: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{N}^+$

$m \in \mathbb{N}^+$ numero di macchine

SOL. AMM.: Assegnamento $\alpha : n \to m$

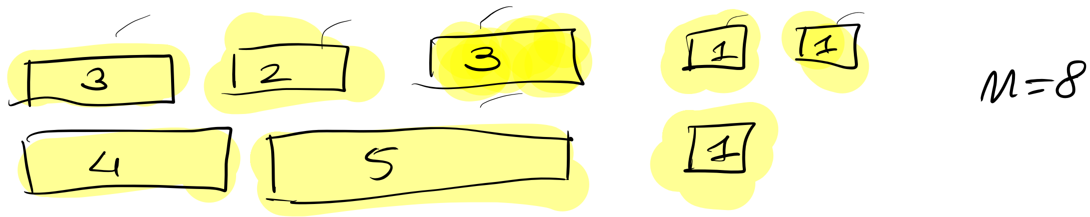
CARICO MACCHINA $j \in m$

$$L_j = \sum_{i \in \alpha^{-1}(j)} t_i$$

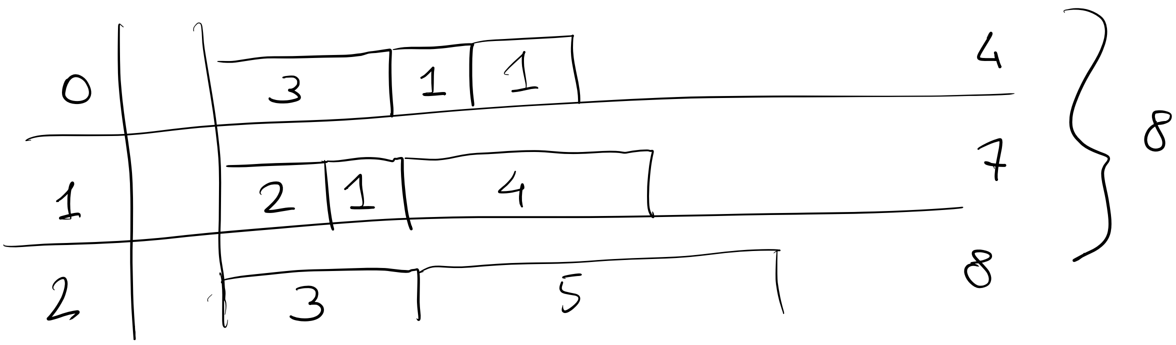
$$L = \max_j L_j$$

FUNZ. OBIETTIVO: L

TIPO: MIN



$m = 3$



GREEDY LOAD BALANCING

- Si analizzano $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ nell'ordine di arrivo
- t_i viene assegnato alla macchina attualmente più scarica

Teorema: GREEDY LOAD BALANCING è un alg. 2-approssimante per LOAD BALANCING

Dim: Osservazione 1: $L^* \geq \frac{1}{m} \sum_i t_i$

$$mL^* \geq \sum_j L_j^* = \sum_i t_i$$

Osservazione 2: $L^* \geq \max_i t_i$

Sia $\bar{\imath}$ t.c. $L_{\bar{\imath}} = L$ (macchina con massimo carico)

Sia $\bar{j}$ l'ultimo task assegnatole

$$\bar{\imath} \quad \boxed{t_{..}}\ \boxed{t_{..}}\boxed{t_{\bar{j}}}$$

$$L_{\bar{\imath}} - t_{\bar{j}} \leq L_i \qquad \forall i$$

$$\sum_i (L_{\bar{\imath}} - t_{\bar{j}}) \leq \sum_i L_i = \sum_j t_j$$

$$m(L_{\bar{\imath}} - t_{\bar{j}}) \leq \sum_j t_j$$

$\boxed{\text{Oss. 1}}$

$$(*) \quad L_{\bar{\imath}} - t_{\bar{j}} \leq \frac{1}{m} \sum_j t_j \leq L^*$$

$$L = L_{\bar{\imath}} = \underbrace{L_{\bar{\imath}} - t_{\bar{j}}}_{\leq L^* \ (*)} + \underbrace{t_{\bar{j}}}_{\leq L^* \ \boxed{\text{Oss. 2}}} \leq 2L^*$$

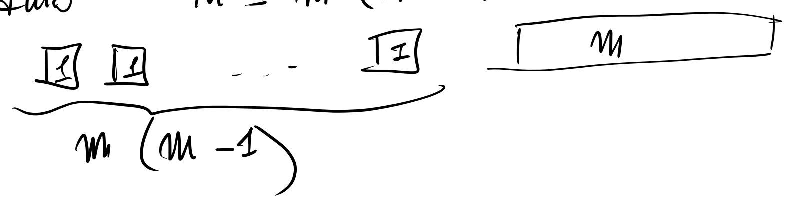
$$\frac{L}{L^*} \leq 2 \qquad \square$$

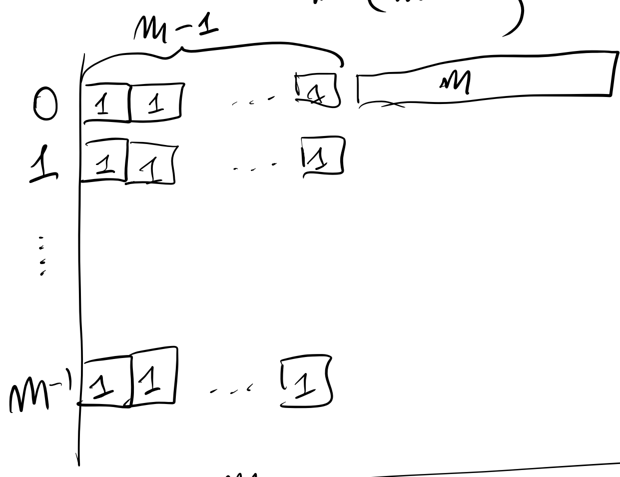
Teorema: Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un input di LOAD BALANCING su cui GREEDY LOAD BALANCING produce una soluzione L

$$2 - \varepsilon \leq \frac{L}{L^*} \leq 2$$

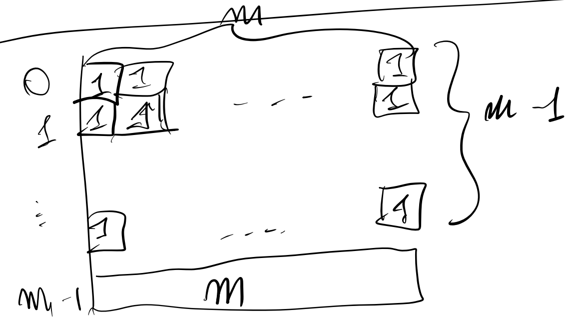
Dim: Scegliamo $m > \frac{1}{\varepsilon}$.

Prendiamo $n = m(m-1) + 1$





$L = 2m - 1$



$L^* = m$

$$\frac{L}{L^*} = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m} \geq 2 - \varepsilon .$$

$\square$