$\boxed{\text{SORTED GREEDY BALANCE}}$ $O(n\log n + n\log m)$

- Ordina i task in modo che
  $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_{n-1}$
- Esegui GREEDY BALANCE

Teorema: SORTED GREEDY BALANCE è un algoritmo $3/2$-approssimante

Dim: Se $n \leq m$, la soluzione è ottima.

$L^* \geq 2t_m$

Oss: $\underbrace{t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{m-1} \geq t_m}\geq t_{m+1} \geq \dots$

Sia $\bar{i}$ la macchina con carico massimo assegnato e $\bar{j}$ l'ultimo carico

$\bar{j} \geq m$

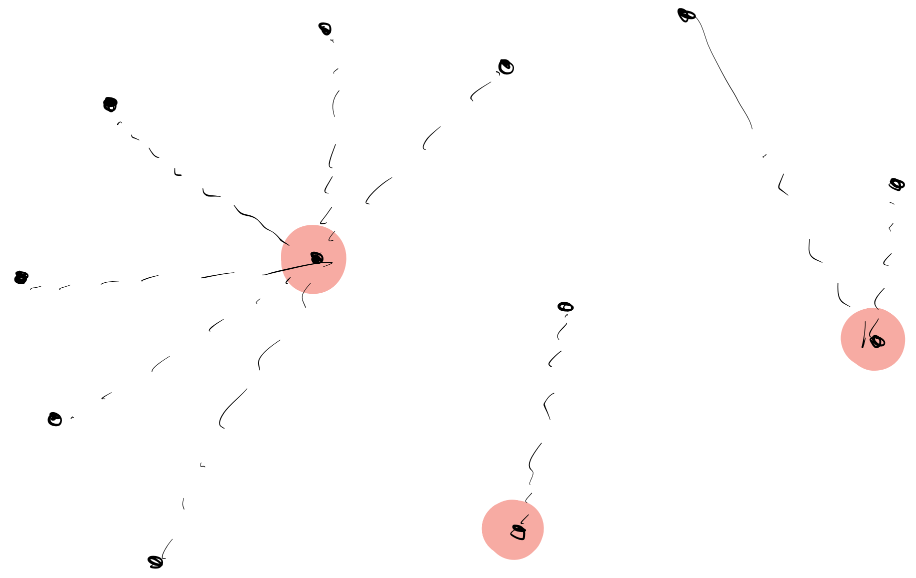
$t_{\bar{j}} \leq t_m \overset{\boxed{\text{Oss}}}{\leq} \frac{1}{2}L^*$

$L = \underbrace{L_{\bar{i}} - t_{\bar{j}}}_{\leq L^*} + \underbrace{t_{\bar{j}}}_{\leq \frac{1}{2}L^*} \leq L^* + \frac{1}{2}L^* = \frac{3}{2}L^*$. $\square$

- In realtà [Graham 1969] l'algoritmo SORTED GREEDY BALANCE è $\frac{4}{3}$-approssim.

- Il problema è in PTAS ma non in FPTAS.
  Nel caso $m=2$, FPTAS.

CENTER SELECTION



SPAZIO METRICO

Ω ins. punti

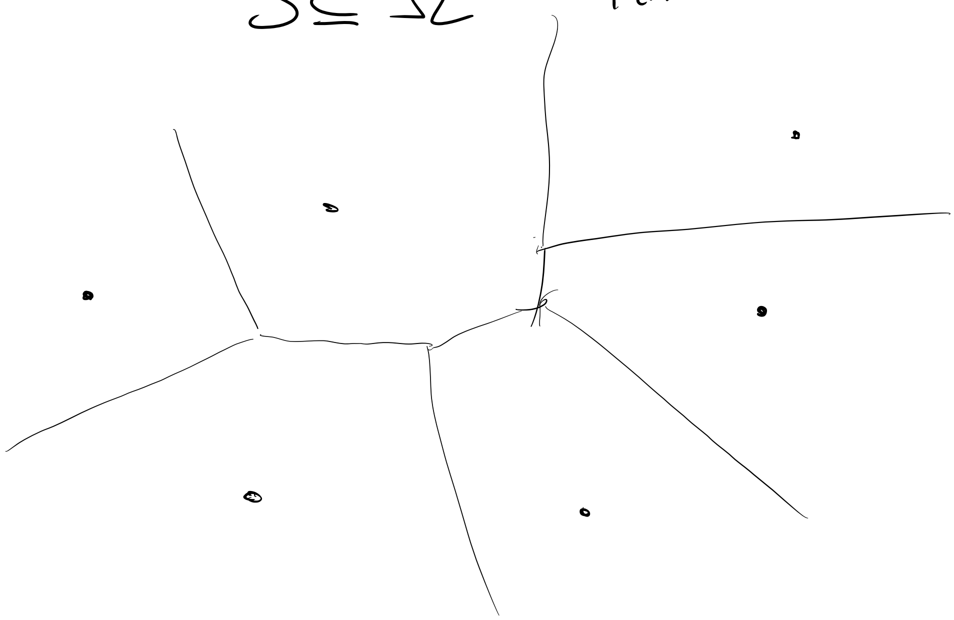
$$d: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

1) $d(x,y) = 0$ sse $x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

CELLE DI VORONOI

(Ω, d) sp. metrico

$S \subseteq \Omega$ finito



$S \subseteq \Omega$ (Ω, d)

$C \subseteq S$ centri

$\forall s \in S$

$VC_C(s) = \underset{c \in C}{\operatorname{argmin}} \; d(s, c)$

CENTER SELECTION

INPUT: $S \subseteq_{fin} \Omega$ dove (Ω, d) è uno sp. metrico

$k \in \mathbb{N}^+$

SOL. AMMISS.: $C \subseteq S$ $|C| \leq k$

FUNZ. OBIETTIVO: $\rho(C) = \max_{s \in S} d(s, VC_C(s))$

TIPO: MIN

CENTER SELECTION PLUS

INPUT: S, k, $r > 0$ (STIMA DEL RAGGIO DI COPERTURA)

$C \leftarrow \emptyset$

while $S \neq \emptyset$
  take $\bar{s} \in S$
  $C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$
  remove from S all s s.t. $d(s, \bar{s}) \leq 2r$

if $|C| > k$
  output "IMPOSSIBILE"
else
  output C

Teorema:
1) Se CENTER SELECTION PLUS emette un output, è una soluzione ammissibile, ed è una $\frac{2r}{\rho^*}$-approssimazione.
2) Se $r \geq \rho^*$, l'algoritmo emette un output.

DIM: $\boxed{1}$ $\forall s \in S$
Sia $\bar{s}$ il centro scelto quando

abbiamo rimosso s

$$d(s,\bar{s}) \leq 2r$$

$$\boxed{d(s,C)} \leq 2r$$

$\min_{c\in C} d(s,C) = d(s, VC_C(s))$

$$\Rightarrow \rho(C) \leq 2r$$

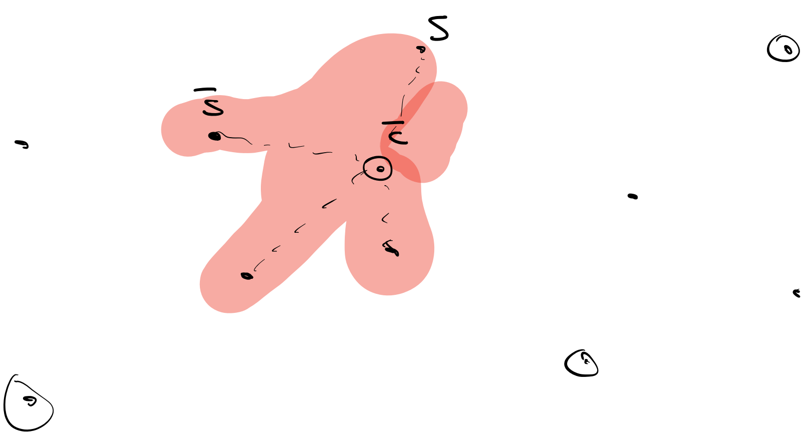
$$\frac{\rho(C)}{\rho^*} \leq \frac{2r}{\rho^*}$$

$\boxed{2}$

Sia C^* una soluzione ottima.
Sia $\bar{s} \in S$, e consideriamo

$$\bar{c} = VC_{C^*}(\bar{s})$$

$$X_{\bar{c}} := VC_{C^*}^{-1}(\bar{c})$$



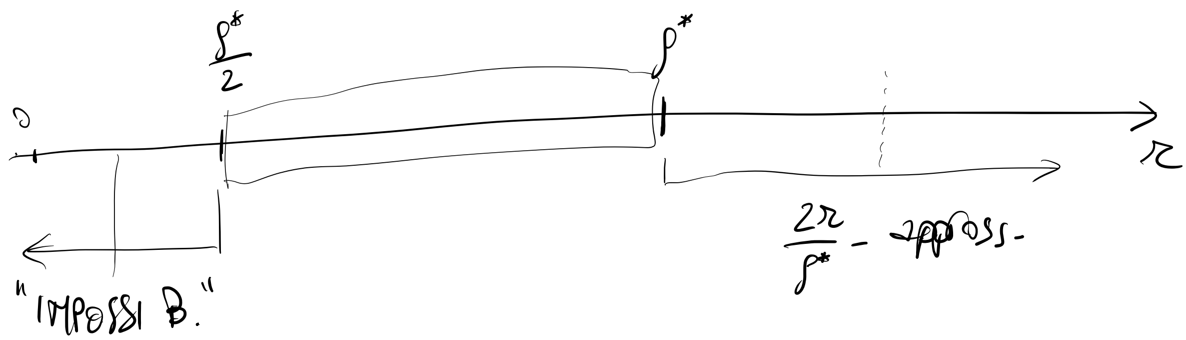
$$d(s,\bar{s}) \leq \underbrace{d(s,\bar{c})}_{\leq \rho^*} + \underbrace{d(\bar{c},\bar{s})}_{\leq \rho^*} \leq 2\rho^* \leq 2r$$

Nel passo in cui $\bar{s}$ viene aggiunto come centro, tutti i punti della soluzione ottima che si rivolgevano allo stesso centro di $\bar{s}$ vengono cancellati.

$\Rightarrow$ Dopo $\leq K$ esecuzioni del ciclo, $S = \emptyset$

$\Rightarrow$ L'algoritmo produce una soluzione. $\square$

Corollario: se l'algoritmo emette "IMPOSSIBILE", allora $r < \rho^*$.



INPUT: S, k, $\underbrace{r > 0}_{\text{STIMA DEL RAGGIO DI COPERTURA}}$

$C \leftarrow \emptyset$

while $\exists\, \bar{s} \in S$ s.t. $d(\bar{s}, C) > 2r$

  take $\bar{s} \in S$ s.t. $d(\bar{s}, C) > 2r$

  $C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

if $|C| > k$

  output "IMPOSSIBILE"

else

  output C

GREEDY CENTER SELECTION

INPUT: S, k

if $|S| \le K$ output S

take $s \in S$

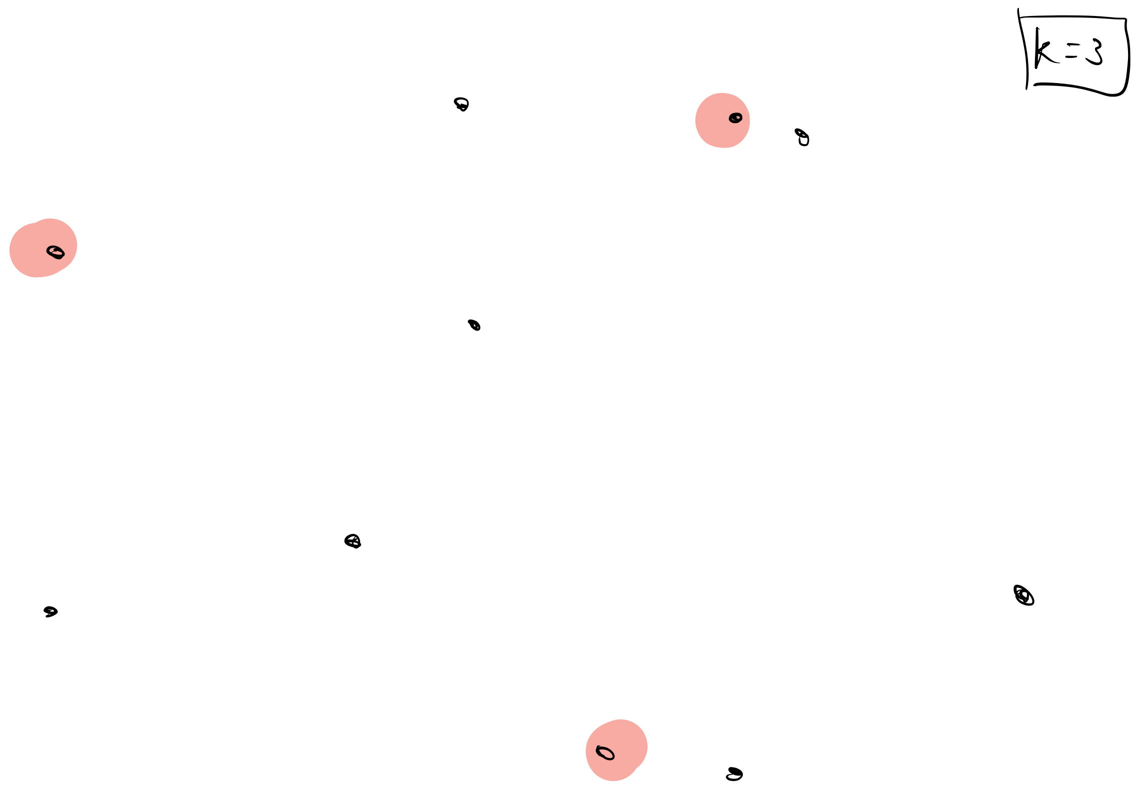
$C \Leftarrow \{s\}$

while $|C| < K$

select $\bar{s}$ maximizing $d(\bar{s}, C)$

$C \Leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

output C


k = 3