PROBLEMA MAX E_k SAT

- **INPUT**: CNF in cui ogni clausola ha k letterali
- **SOL. AMM.**: Assegnamenti di verità
- **FUNZ. OB.**: # clausole soddisfatte
- **TIPO**: MAX

$$(x_1 \lor \neg x_3 \lor x_5) \land (x_1 \lor \neg x_4 \lor x_3) \land (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$$

MAX E_3 SAT

ALG. PROBABILISTICO

- Decidi di rendere true/false una variabile con prob. $1/2$

Teorema: In valore atteso la frazione di clausole vere è

$$\geq \frac{2^k - 1}{2^k}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathrm{Unif}\{0,1\}$ v.a.

$C_1, \dots, C_t$ $\quad C_i = \begin{cases} 1 & \text{se la clausola } i \text{ è soddisf.} \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$

T numero di clausole soddisfatte

$E[T] =$ ⟵ legge del valore atteso totale

$$= \sum_{b_1 \in 2} \dots \sum_{b_n \in 2} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \, P[X_1 = b_1, X_2 = b_2, \dots, X_n = b_n] =$$

$=$ ⟵ $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d.

$$\sum_{b_1 \in 2} \dots \sum_{b_n \in 2} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \underbrace{P[X_1 = b_1]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P[X_2 = b_2]}_{\frac{1}{2}} \dots \underbrace{P[X_n = b_n]}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1 \in 2} \dots \sum_{b_n \in 2} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1 \in 2} \dots \sum_{b_n \in 2} E\left[\sum_{i=1}^{t} C_i \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n\right] =$$

$= \leftarrow$ Linearità

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{t}\Bigg(\sum_{b_1\in 2}\cdots\sum_{b_n\in 2}\underbrace{E[C_i \mid X_1=b_1,\dots,X_n=b_n]}\Bigg) =$$

$$C_i = \underbrace{X_1 \lor \neg X_7 \lor X_{14} \lor X_{15}}_{k \text{ variabili}}$$

2^n assegnamenti possibili

2^{n-k} assegnamenti che rendono $C_i = 0$

$2^n - 2^{n-k}$ assegnamenti che rendono $C_i = 1$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{t}\left(2^n - 2^{n-k}\right) = \frac{t}{2^n}\left(2^n - 2^{n-k}\right) =$$

$$= t\,\frac{2^k - 1}{2^k} \qquad \square$$

Lemma: Per ogni $j = 0, \dots, n$ esiste $b_1, b_2, \dots, b_j \in 2$

t.c.

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

Dim: Per induzione su j.

$\boxed{j=0}$ Teorema.

$\boxed{j \to j+1}$

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

$$\| $$

A_0

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j, X_{j+1} = 0] \frac{1}{2} +$$

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j, X_{j+1} = 1] \frac{1}{2}$$

A_1

Pa. $A_0 < \frac{2^k - 1}{2^k} t$ $\qquad A_1 < \frac{2^k - 1}{2^k} t$

$$A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{1}{2} < \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} + \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{2^k - 1}{2^k}$$

$D \leftarrow \emptyset$ indici delle clausole già decise positivamente

for $i = 1, \dots, n$

- $\Delta_0 \leftarrow 0$ quanto aumenta il v.a. cond. se assegno $x_i = 0$
- $\Delta_1 \leftarrow 0$ quanto aumenta il v.a. cond. se assegno $x_i = 1$
- $\Delta D_0 \leftarrow \emptyset$ insieme di clausole che vengono rese vere con $x_i = 0$
- $\Delta D_1 \leftarrow \emptyset$ insieme di clausole che vengono rese vere con $x_i = 1$
- **for** $j = 1, \dots, t$
  - **if** $j \in D$ **continue**
  - **if** x_i non compare in C_j **continue**
  - $h \leftarrow$ numero di variabili di indice $> i$ che compaiono in C_j
  - **if** x_i compare positivo in C_j
    - $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 - \frac{1}{2^h}$
    - $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + \frac{1}{2^h}$
    - $\Delta D_1 \leftarrow \Delta D_1 \cup \{j\}$
  - **else**
    - $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 + \frac{1}{2^h}$
    - $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 - \frac{1}{2^h}$
    - $\Delta D_0 \leftarrow \Delta D_0 \cup \{j\}$

$$u = \arg\max \{\Delta_0, \Delta_1\}$$
$$x[i] = u$$
$$D \leftarrow D \cup \Delta D_u$$

<u>output</u> $x[1], x[2], \ldots, x[n]$

$$(*) \quad \mathbb{E}\left[T \mid X_1 = b_1, \ldots, X_{i-1} = b_{i-1}\right] \geq \underline{\frac{2^k - 1}{2^k}\, t}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum C_j \mid X_1 = b_1, \ldots, X_{i-1} = b_{i-1}\right]$$

$\boxed{X_i}$

$j \in D$

1

$$\overbrace{\boxed{\frac{2^h - 1}{2^h}} \qquad \frac{2^{h-1} - 1}{2^{h-1}}}^{h}$$

x_i capture positio in C_j

$$1 - \frac{2^h - 1}{2^h} = \boxed{\frac{1}{2^h}}$$

$$\frac{2^{h-1} - 1}{2^{h-1}} - \frac{2^h - 1}{2^h} = \frac{2^h - 2 - 2^h + 1}{2^h} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2^h}}$$

Corollario: L'algoritmo deterministico fornisce una $\frac{2^k}{2^k-1}$-approssim. per MAX E_k SAT

Dim: t numero di clausole

t^* soluzione ottima

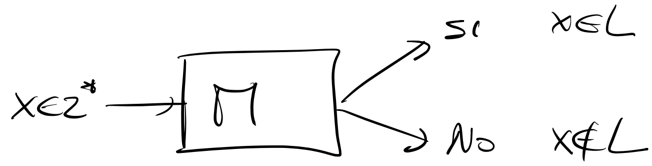
$\bar{t}$ soluzione prodotta dall'alg.

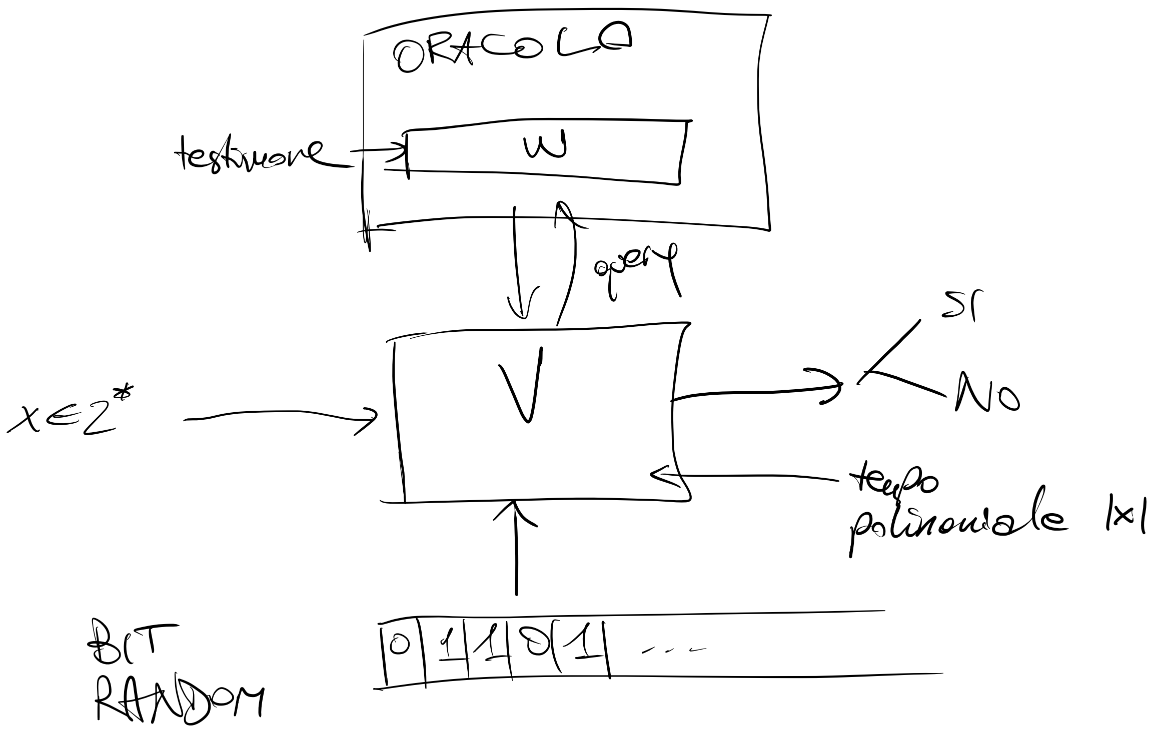
$$\frac{t^*}{\bar{t}} \leq \frac{t}{\bar{t}} \leq \frac{t}{\frac{2^k-1}{2^k}\, t} = \frac{2^k}{2^k-1} \quad \square$$

PCP — Probabilistically Checkable Proofs

- Verificatori probabilistici per problemi di decisione.

$L \subseteq \Sigma^*$





1) se $x \in L$ $\exists w \in \Sigma^*$ t.c.

$V(x, w) = SI$ con prob. 1

2) se $x \notin L$ $\forall w \in \Sigma^*$

$V(x, w) = SI$ con prob. $< \frac{1}{2}$

$PCP[r(n), q(n)] = \{ L \subseteq 2^* \mid$ L è accettato da un verificatore probabilistico con $\leq r(|x|)$ bit random e $\leq q(|x|)$ query all'oracolo $\}$

$$PCP[R, Q] = \bigcup_{\substack{r(n) \in R \\ q(n) \in Q}} PCP[r(n), q(n)]$$

- $PCP[0, 0] = P$

  $PCP[0, Poly] = NP$

Teorema (Arora, Safra 1998):

$NP = PCP[O(\log n), O(1)]$

$\boxed{\text{VERIFICATORI PROBABILISTICI NORMALIZZATI}}$ $PCP[O(\log n), O(1)]$

$\qquad\qquad r(n) \qquad q$

1) Prima di ogni altra cosa, genera i bit random. $R \in 2^{r(|x|)}$

2) Dopo aver generato i bit random fa tutte le query.

3) Effettua il resto della computazione.