$G = (V, E)$ $\qquad S^* \subseteq V$ taglio minimo

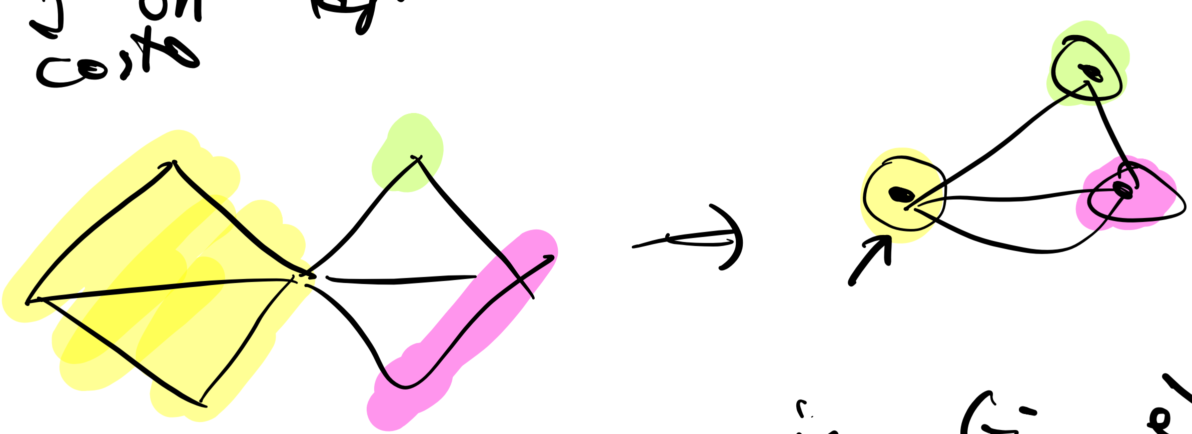
$K^* = \left| E_{S^*} = \{ e \mid e \cap S^* \neq \emptyset,\ e \cap (S^*)^c \neq \emptyset \} \right|$

$G = G_1,\ G_2,\ G_3,\ \dots,\ G_i,\ \dots,\ G_{n-1}$

$n, m \qquad n-1, \qquad n-2$

1) G_i (il grafo all'i-esima iterazione) ha $n-i+1$ vertici e $\leq m-i+1$ lati

2) Ogni taglio di G_i corrisponde con lo stesso costo a un taglio di G



3) Il grado minimo in G_i è $\geq K^*$

$$2\,\#\text{lati di } G_i = \sum_{v \in V_{G_i}} d_i(v) \overset{3}{\geq} K^*(n-i+1)$$

$$m-i+1 \geq \#\text{lati di } G_i \geq \frac{(n-i+1)K^*}{2}$$

$\mathcal{E}_i$ = all'i-esima iterazione non è stato contratto nessun lato del taglio ottimo E_{S^*}

<u>Lemma</u>: $\forall i \quad P[\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] \geq \frac{n-i-1}{n-i+1}$.

<u>Dim</u>: $P[\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] =$

$$= 1 - P[\overline{\mathcal{E}}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] =$$

$$= 1 - \frac{k^*}{\#\text{lati } G_i} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\cancel{k^*}\, 2}{(n-i+1)\, \cancel{k^*}} = 1 - \frac{2}{n-i+1} =$$

$$= \frac{n-i+1-2}{n-i+1} = \frac{n-i-1}{n-i+1}. \qquad \square$$

<u>Teorema</u>: Con prob. $\geq \frac{1}{\binom{n}{2}}$ karger trova l'ottimo.

<u>Dim</u>: $P[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{n-2}] =$

$$= P[\mathcal{E}_1]\, P[\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1]\, P[\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] \cdots \geq$$

$$\geq \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{1}{3} -$$

$$= \frac{(n-2)!\, 2 \cdot 1}{n!} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \quad \square$$

Corollario: Se eseguiamo Karger $\binom{n}{2} \ln n$ volte troviamo il taglio minimo con prob. $\geq 1 - \frac{1}{n}$.

Dim: La probabilità di non trovare il taglio minimo ogni volta

$$\leq 1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

La probabilità di non trovarlo mai

$$\leq \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}\right)^{\binom{n}{2} \ln n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n}. \quad \square$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \leq \frac{1}{e}$$

PROPRIETÀ

- Union bound

$$P\left[\bigcup_i A_i\right] \leq \sum_i P[A_i]$$

- Markov inequality

$$P[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

per ogni variabile aleatoria $X \geq 0$
e per ogni $\alpha > 0$

ALGORITMO PROBABILISTICO PER SET COVER (arrotondamento aleatorio)

INPUT: $S_1, \dots, S_m$ $\quad \bigcup_{i=1}^{m} S_i = U$

$w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^{>0}$ $\quad n = |U|$

SOL. ACCETTABILE: $I \subseteq \{1, \dots, m\}$

t.c. $\bigcup_{i \in I} S_i = U$

FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in I} w_i$

TIPO: MIN

$$\hat{P} \quad \left[\begin{array}{l} x_1, \dots, x_m \in \{0, 1\} \\ \min \quad w_1 x_1 + \dots + w_m x_m \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} x_i \geq 1 & \forall p \in U \\ x_i \geq 0 & x_i \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ALGORITMO (parametro $k \in \mathbb{N}$)

1) Costruisco $\hat{P}$ e lo risolvo $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$

2) for $t = 1, \dots, \lceil k + \ln n \rceil$

$\forall i = 1, \dots, m$ aggiungiamo i alla soluzione con probabilità $\hat{x}_i$

Teorema 1: L'algoritmo produce una soluzione ammissibile con probabilità $\geq 1 - e^{-k}$

Dim: P[sol. ammissibile] =

= 1 − P[almeno un punto dell'universo sia lasciato fuori] =

$\boxed{\mathcal{E}_p = \text{"il punto } p \text{ non è coperto"}}$

$$= 1 - P\Big[\bigcup_{p \in U} \mathcal{E}_p\Big] \geq$$

Union bound

$$\geq 1 - \sum_{p \in U} P[\mathcal{E}_p] =$$

$$= 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} P[i \text{ non è nella soluzione}] =$$

$$= 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} (1 - \hat{x}_i)^{k + \ln n} \geq$$

$$\boxed{1 - x \leq e^{-x}}$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} e^{-\hat{x}_i (k + \ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{p \in U} e^{-(k + \ln n) \overbrace{\sum_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} \hat{x}_i}^{\geq 1}} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in U} e^{-(k + \ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{p \in U} \frac{e^{-k}}{n} = 1 - n \cdot \frac{e^{-k}}{n} =$$

$$= 1 - e^{-k}. \qquad \square$$

Teorema 2: Per ogni $\alpha > 0$

$$P[\text{fatt. approssimazione} \geq \alpha(\underset{3+\ln n}{k+\ln n})] \leq \frac{1}{\alpha}$$

Dim: P ILP

w^*

$\hat{P}$ LP

sol. output dall'algoritmo $\hat{w} = \sum_i w_i \hat{x}_i$ $\quad \hat{w} \leq w^*$

$$E[w] = \sum_{i=1}^{m} w_i P[i \text{ sta nella soluzione}] \leq$$

union bound

$$\leq \sum_{i=1}^{m} w_i (k+\ln n)\hat{x}_i =$$

$$= (k+\ln n) \sum_{i=1}^{m} w_i \hat{x}_i =$$

$$= (k+\ln n)\hat{w} \leq (k+\ln n) w^* \quad (*)$$

Dis. Markov

$$P[X \geq \beta] \leq \frac{E[X]}{\beta} \quad \beta > 0, \; X \geq 0$$

$X = \frac{w}{w^*}$

$\beta = \alpha(k+\ln n)$

$$P\left[\frac{w}{w^*} \geq \alpha(k+\ln n)\right] \leq \frac{E\left[\frac{w}{w^*}\right]}{\alpha(k+\ln n)} =$$

$$= \frac{E[w]}{\alpha w^*(k+\ln n)} \underset{(*)}{\leq} \frac{w^*(k+\ln n)}{\alpha w^*(k+\ln n)} = \frac{1}{\alpha}$$

$\square$

<u>Corollario</u>: Con $k=3$, c'è il $\geq 45\%$ di probabilità di sol. ammiss. con rapp. di appross. $\leq 6+2\ln n$

<u>Dim</u>: $\mathcal{E}_{non\text{-}amm}$ = non si è ottenuta una sol. ammissibile

$\mathcal{E}_{brutto}$ = si è ottenuta una soluzione di costo $\geq 6+2\ln n$ l'ottimo

$$P[\mathcal{E}_{non\text{-}amm}] \overset{\text{Thm 1}}{\leq} e^{-3}$$

$$P[\mathcal{E}_{brutto}] = P[\text{fattore appr.} \geq 6+2\ln n] =$$

$$= P[\text{fatt. appr.} \geq 2\cdot(k+\ln n)] \leq$$

Thm 2

$$\leq \frac{1}{2}$$

$$P[\mathcal{E}_{amm} \wedge \mathcal{E}_{non\ brutta}] =$$

$$= 1 - P[\mathcal{E}_{non-amm} \vee \mathcal{E}_{brutta}] \geq$$

$$\geq 1 - \left(P[\mathcal{E}_{non-amm}] + P[\mathcal{E}_{brutta}]\right) \geq$$

$$\geq 1 - \left(e^{-3} + \frac{1}{2}\right) \approx 0.45$$

$\square$