MAX E_k SAT CON DERANDOMIZZAZIONE

INPUT: Formula CNF in cui ogni clausola contiene esattamente K letterali con variabili distinte

$$\underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)}_{k=3} \wedge \underbrace{(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})} \wedge \dots$$

SOL. AMMISSIBILI: Assegnamenti di valori di verità

FUNZ. OBIETTIVO: # clausole rese vere

TIPO: MAX

$x_1, \dots, x_n$ variabili che compaiono clausole

$c_1, \dots, c_t$

Teorema 1: Con un assegnamento casuale delle variabili $x_1, \dots, x_n$ il numero atteso di clausole soddisfatte è

$$\frac{2^k - 1}{2^k} t \qquad \left[k=3 \quad \frac{7}{8} t \right]$$

Dim: $X_i \sim Unif\{0, 1\}$ valore assegnato a x_i

Dim:

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{se } c_j \text{ è soddisfatto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$T = \#\text{clausole soddisfatte}$$

$$E[T] =$$

$$= \underbrace{\sum_{b_1 \in 2} \sum_{b_2 \in 2} \dots \sum_{b_n \in 2}}\ E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]\ P[X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] =$$

$$= \sum_{b_1} \dots \sum_{b_n} E[C_1 + \dots + C_t \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]\ \underbrace{P[X_1 = b_1] \dots P[X_n = b_n]}_{\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1} \dots \sum_{b_n} \sum_{j=1}^{t} E[C_j \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{t} \left(\underbrace{\sum_{b_1} \dots \sum_{b_n}}_{2^n} E[C_j \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \right)$$

$2^n \longrightarrow$ 2^{n-k} assegnamenti che danno $C_j = 0$

$2^n - 2^{n-k}$ danno $C_j = 1$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{t} \left(2^n - 2^{n-k}\right) =$$

$2^n - 2^{n-k}$ ... $2^k - 1$

$$= \frac{2^n - 2}{2^n} t = \frac{2^k - 1}{2^k} t. \quad \square$$

<u>Teorema 2</u>: Per ogni $i = 0, \dots, n$

esistono $b_1, b_2, \dots, b_i \in 2$ t.c.

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_i = b_i] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

<u>Dim</u>: Per induzione su i.

Per $i = 0$, Teorema 1.

Per il passo induttivo $i-1 \longrightarrow i$

$$\frac{2^k-1}{2^k} t \overset{\text{IPOTESI D'IND.}}{\leq} \underbrace{E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}]}_{} =$$

$$= E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = 0]\, P[X_i = 0]$$

$$+ E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = 1]\, P[X_i = 1] =$$

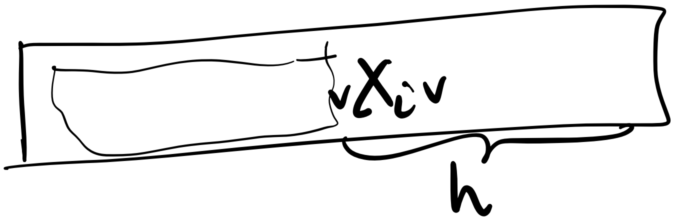
$$= \frac{1}{2} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = 0] +$$

$$\frac{1}{2} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = 1]$$

$\Rightarrow$ (Per internalità della media almeno uno dei due deve essere $\geq \frac{2^k-1}{2^k} t$) $\square$

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}] \geq \frac{2^k-1}{2^k} t$$

X_i ?



$$\frac{2^h-1}{2^h}$$

$X_i = 1$ $\qquad \frac{2^h-1}{2^h} \xrightarrow{\Delta} 1$

$$1 - \frac{2^h-1}{2^h} = \frac{2^h-2^h+1}{2^h} = \frac{1}{2^h}$$

$X_i = 0$ $\qquad \frac{2^h-1}{2^h} \xrightarrow{\Delta} \frac{2^{h-1}-1}{2^{h-1}}$

$$\frac{2^{h-1}-1}{2^{h-1}} - \frac{2^h-1}{2^h} = \frac{2^h-2-2^h+1}{2^h} = -\frac{1}{2^h}$$

ALGORITMO DERANDOMIZZATO

$D \leftarrow \emptyset$ (clausole già decise)

<u>for</u> $i = 1, \dots, n$
  // Decide whether $x_i = 0$ or $x_i = 1$
  $\Delta_0 \leftarrow 0$
  $\Delta_1 \leftarrow 0$
  $D_0 \leftarrow \emptyset$
  $D_1 \leftarrow \emptyset$
  <u>for</u> $j = 1, \dots, t$
    <u>if</u> $j \in D$ <u>continue</u>
    <u>if</u> x_i non compare in c_j <u>continue</u>
    $h \leftarrow$ numero di variabili di indice $\geq i$ in c_j
    <u>if</u> x_i compare positiva in c_j
      $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + 1/2^h$
      $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 - \frac{1}{2^h}$
      $D_1 \leftarrow D_1 \cup \{j\}$
    <u>else</u>
      $\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 - \frac{1}{2^h}$
      $\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 + \frac{1}{2^h}$
      $D_0 \leftarrow D_0 \cup \{j\}$
  <u>if</u> $\Delta_0 > \Delta_1$
    $x_i \leftarrow 0$

$D \leftarrow D \cup D_0$

else

$x_i \leftarrow 1$

$D \leftarrow D \cup D_1$

Teorema: L'algoritmo fornisce una $\frac{2^k}{2^k-1}$-approssimazione $\left[k=3 \quad \frac{8}{7} \right]$

Dim: # clausole soddisfatte dall'alg. $\geq \frac{2^k-1}{2^k} t$

ottimo $t^* \leq t$

$$\frac{t^*}{\text{\#clausole sodd. dall'alg.}} \leq \frac{t}{\frac{2^k-1}{2^k} t} = \frac{2^k}{2^k-1} \quad \square$$