ALGORITMO DI CHRISTOFIDES

$G=(V,E)$, $\langle d_e \rangle_{e \in E}$

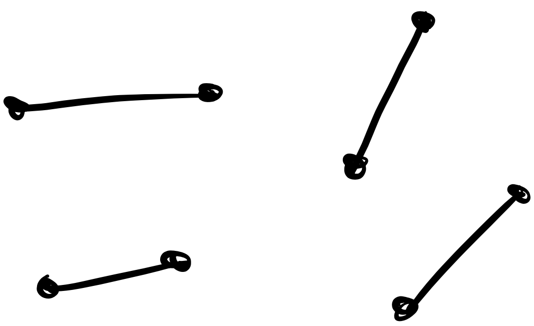
INPUT: clique pesata sui lati

OUTPUT: cammino hamiltoniano di peso minimo

1) MINIMUM-WEIGHT SPANNING TREE (es. Algoritmo di Kruskal)

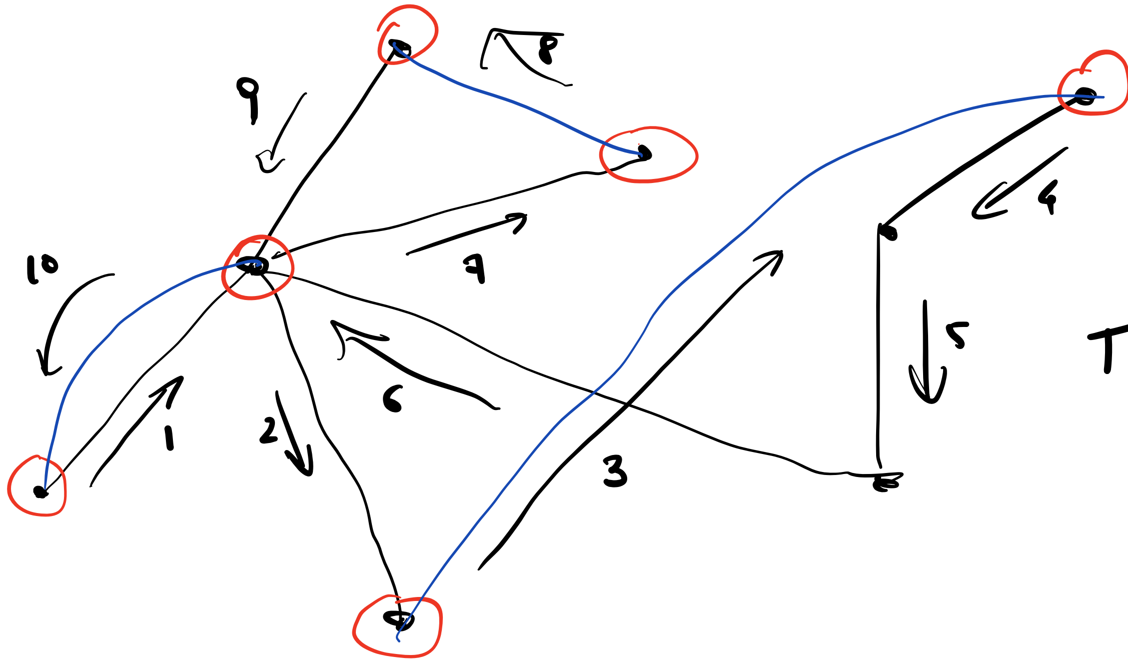
2) MINIMUM-WEIGHT PERFECT MATCHING

Data una clique con un numero pari di vertici, trova un matching perfetto di peso minimo.

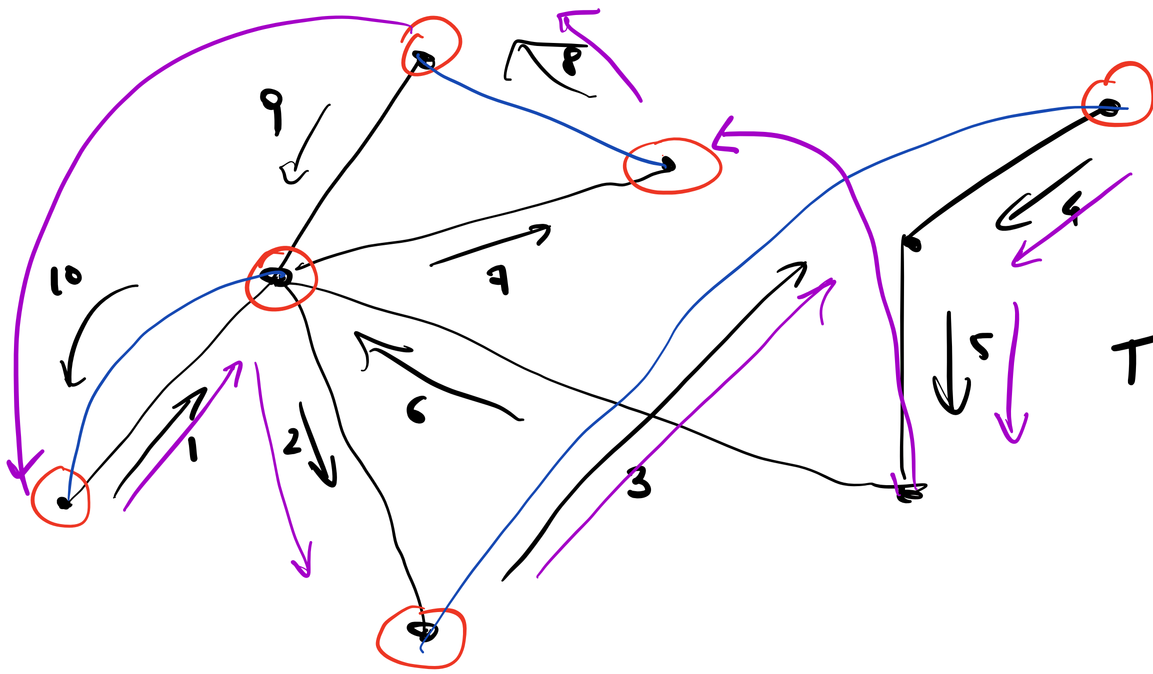


(es. Blossom Algorithm)

1) Trova un MST T
2) Sia D l'insieme dei vertici di grado dispari in T.
Per il lemma delle strette di mano, |D| è pari.
3) Su G[D] (grafo indotto su D) sia M il minimum perfect matching
4) Sia H il multigrafo non orientato
$\boxed{TUM}$
5) In H tutti i vertici hanno grado pari → esiste un circuito euleriano π
6) Da π si ottiene un circuito hamiltoniano $\tilde{\pi}$ mediante cortocircuitazione



$H = T \cup M$



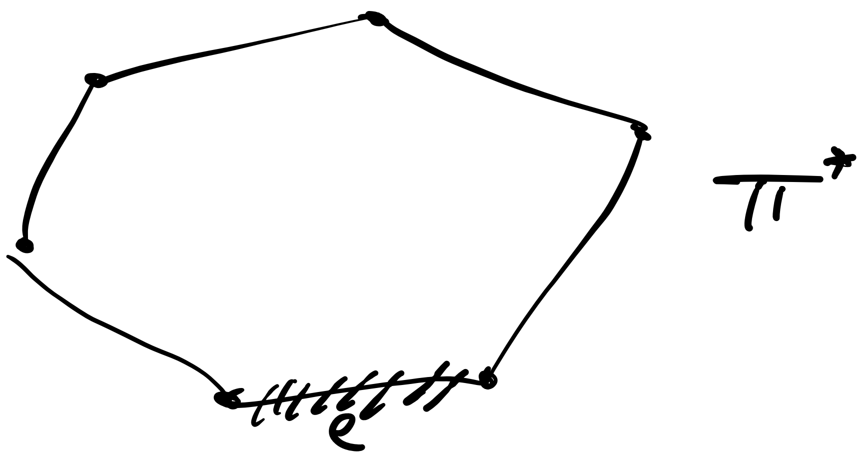
$H = T \cup M$

Teorema: Se il TSP è metrico (cioè, i $\langle \delta_e \rangle_{e \in E}$ soddisfano la disuguaglianza triangolare) l'Alg. Christofides fornisce una $\frac{3}{2}$-approssimazione

Lemma 1: $\delta(T) \leq \delta^*$

Dim: Sia π^* il circuito hamiltoniano ottimo. Sia e un qualsiasi lato di π^*.

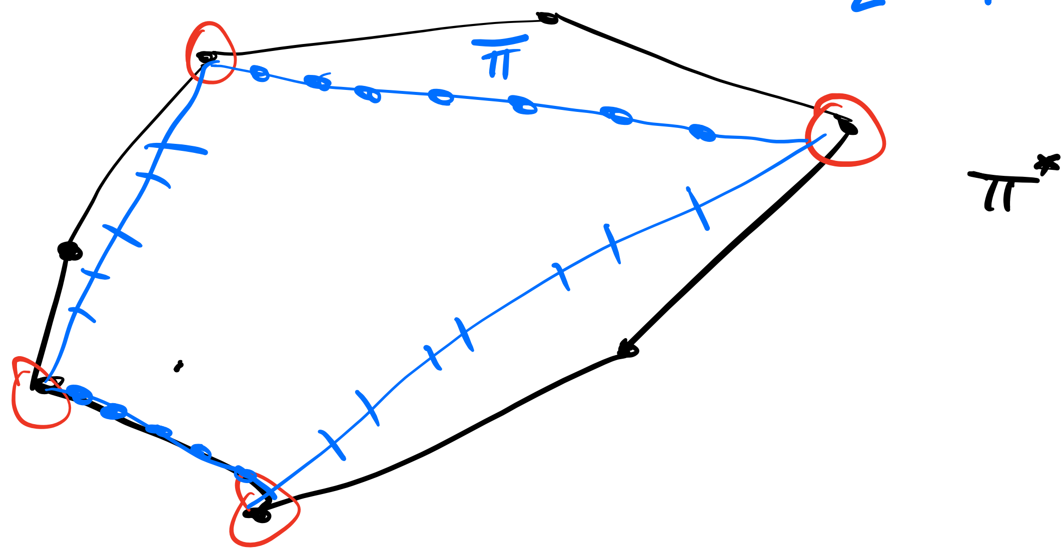
$$\delta^* = \delta(\pi^*) \geq \delta(\underbrace{\pi^* \setminus e}_{\text{Albero di copertura}}) \geq \delta(T).$$



Lemma 2: $\delta(M) \leq \frac{1}{2}\delta^*$

Dim: Prendiamo π^* e cortocircuitiamolo su D

M_1 •–•–•–•–• , M_2 •–|–|–|–• } due matching di D



$$\delta(M_1) + \delta(M_2) = \delta(\pi) \leq \delta^*$$
$$\vee\!\!\!/$$
$$\delta(M) + \delta(M) = 2\delta(M)$$

$$\Rightarrow \quad 2\delta(M) \leq \delta^*$$
$$\delta(M) \leq \frac{1}{2}\delta^*$$

$\square$

$$\delta = \underbrace{\delta(\tilde{\pi})}_{\substack{\text{cammino}\\ \text{hamiltoniano}\\ \text{su } H}} \overset{\text{triangolare}}{\leq} \underbrace{\delta(\pi)}_{\substack{\text{cammino}\\ \text{euleriano}\\ \text{su } H}} = \delta(T) + \delta(M) \leq$$

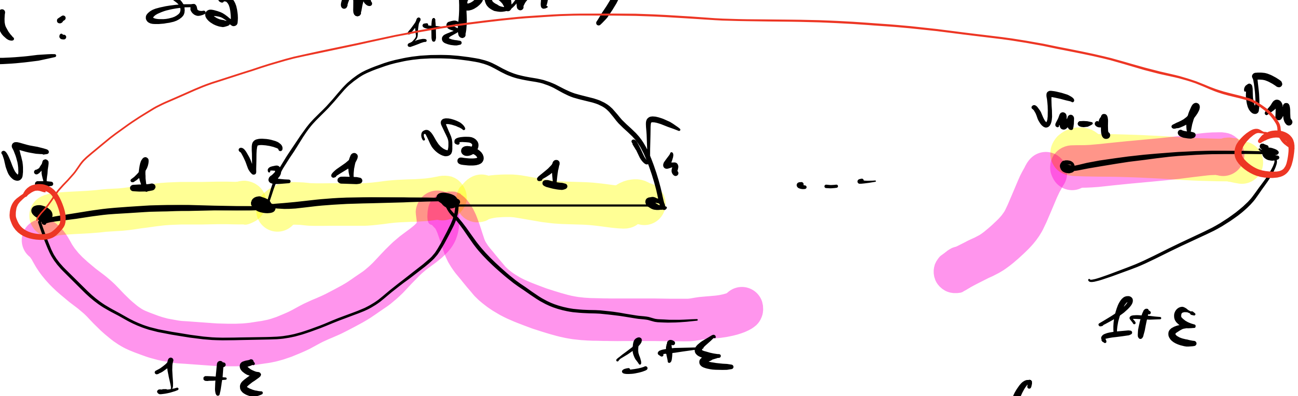
$$\leq \delta^* + \frac{1}{2}\delta^* =$$

$$= \frac{3}{2}\delta^* .$$

$\square$

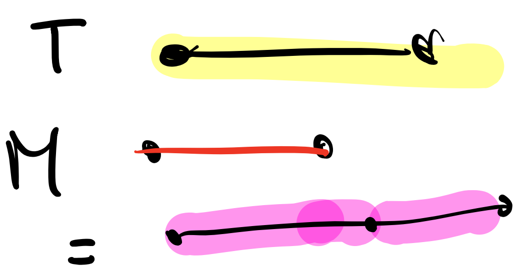
Teorema: L'analisi di Christofides è stretta.

Dim: Sia n pari, $\varepsilon \leq 1$

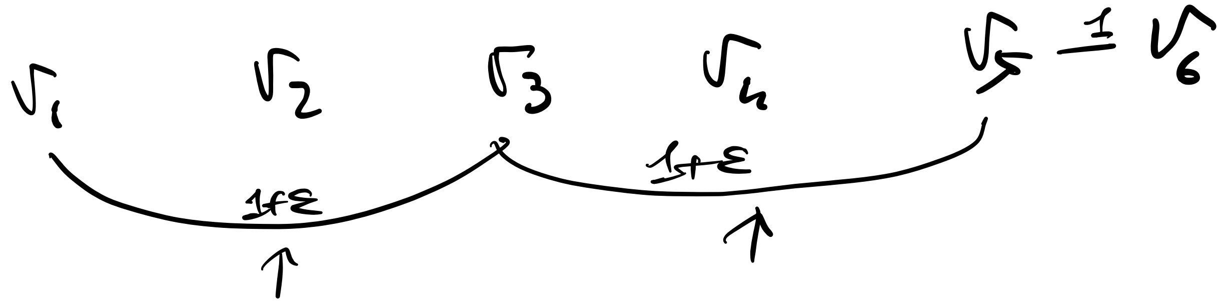


Aggiungiamo tutti i lati mancanti per una clique con peso la lungh. del cammino minimo.

$$\delta = \delta(H) = \underbrace{n-1}_{\delta(T)} + \underbrace{\left(\frac{n}{2}-1\right)(1+\varepsilon)+1}_{\delta(M)} =$$



$$= n-1+\frac{n}{2} - 1 + \left(\frac{n}{2}-1\right)\varepsilon + 1 = \frac{3}{2}n + \left(\frac{n}{2}-1\right)\varepsilon - 1$$

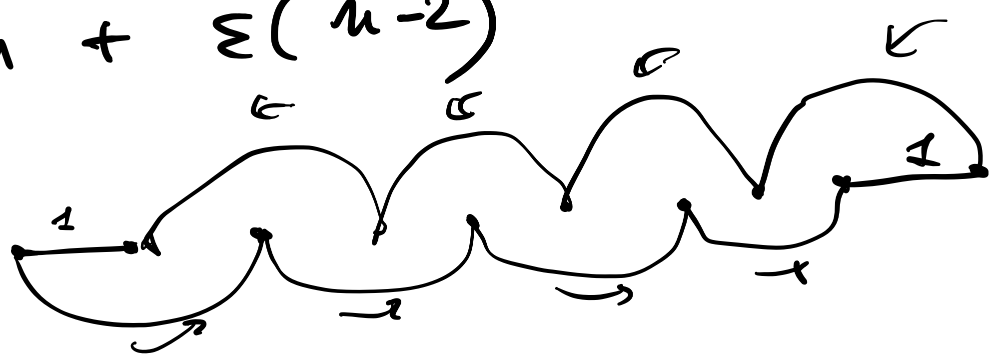


$$\delta^* = (1+\varepsilon)\left(\frac{n}{2}-1\right) + (1+\varepsilon)\left(\frac{n}{2}-1\right) + 2 =$$

$$= (1+\varepsilon)(n-2) + 2 =$$

$$= n - 2 + \varepsilon(n-2) + 2 =$$

$$= n + \varepsilon(n-2)$$



$$\frac{\delta}{\delta^*} = \frac{\frac{3}{2}n + \left(\frac{n}{2}-1\right)\varepsilon + 1}{n + (n-2)\varepsilon} \longrightarrow \frac{3}{2} \qquad \square$$

$n \to \infty$
$\varepsilon \to 0$

INAPPROSSIMABILITÀ DEL TSP GENERALE

Teorema: Non esiste nessun $\alpha > 1$ t.c. TSP sia α-approssimabile in tempo polinomiale (se $P \neq NP$).

Dim: Si sa che decidere se un grafo ha un circuito hamiltoniano è NP-completo.

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato: Vogliamo decidere se ha un cammino hamiltoniano.

$$\Rightarrow \quad G' = \left(V, \binom{V}{2}, \langle \delta_e \rangle_{e \in \binom{V}{2}}\right)$$

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x,y\} \in E \\ \lceil \alpha n \rceil + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. G ha un circuito hamiltoniano
   $\Rightarrow$ G' ha un circuito hamiltoniano di lunghezza n
   $\Rightarrow$ l'algoritmo trova un circuito di lungh. $\leq \alpha n$

② G non ha un circuito hamiltoniano
$\Rightarrow$ ogni circuito hamiltoniano di G' contiene almeno un lato di peso $\lceil \alpha n \rceil + 1$
$\Rightarrow$ il circuito hamiltoniano minimo di G' ha peso $\geq \lceil \alpha n \rceil + 1$
$\Rightarrow$ l'algoritmo trova un circuito di lungh. $\geq \lceil \alpha n \rceil + 1$

[Se fosse
$$\alpha n < \lceil \alpha n \rceil + 1$$
riuscirei a decidere se G ha un cammino hamiltoniano.]

Quindi
$$\alpha n \geq \lceil \alpha n \rceil + 1$$
$$\alpha \geq \frac{\lceil \alpha n \rceil + 1}{n} \geq \frac{\alpha n + 1}{n} =$$
$$= \alpha + \frac{1}{n}$$
MAI !

$\nexists \alpha$

$\square$