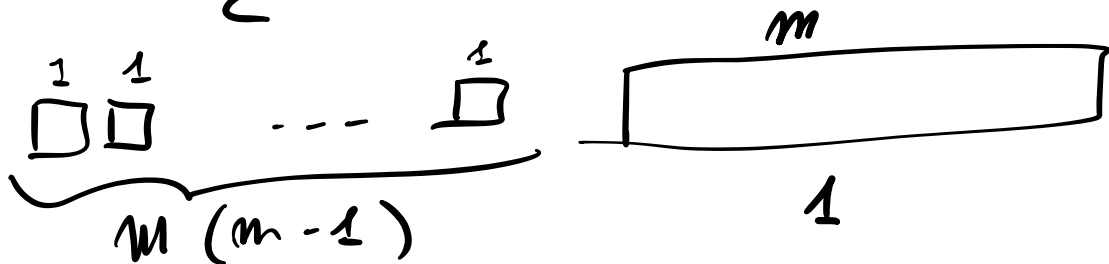


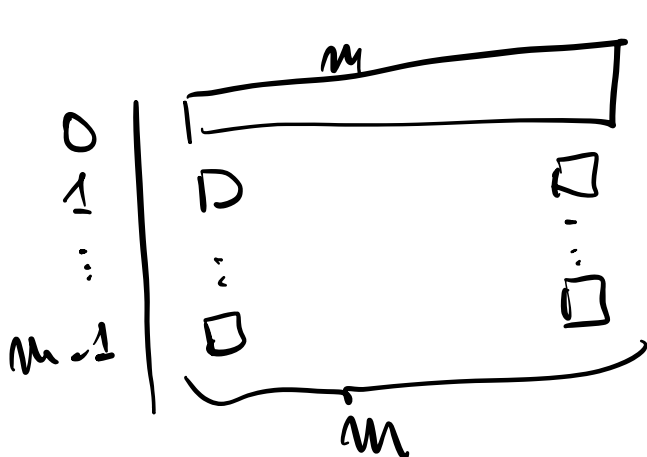
Theorem: For ogni $\varepsilon > 0$, esiste un input per **LOAD BALANCING** t.c. **GREEDY BALANCE** produce un output

$$2 - \varepsilon \leq \frac{L}{L^*} \leq 2$$

Dim: $m > \frac{1}{\varepsilon}$ $n = m(m-1) + 1$



$$L = m-1 + m = 2m-1$$



$$L^* = m$$

$$2 \geq \frac{L}{L^*} = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m} \geq 2 - \varepsilon$$



SORTED GREEDY BALANCE

INPUT: $m \geq 0, n \geq 0, (t_i)_{i \in m}$

- Sort t_i in NON-INCREASING ORDER
- Run GREEDY BALANCE

Theorem: SORTED GREEDY BALANCE produce una $\frac{3}{2}$ -approssimazione

Dim: Oss. 1: Se $n \leq m$, la soluzione prodotta è ottima.

→ Considero solo il caso $n > m$.

Oss. 2: $L^* \geq 2t_m \Rightarrow \frac{1}{2}L^* \geq t_m$

$t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m \geq t_{m+1} \geq \dots \geq t_{n-1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m+1}$

$\{$

$\geq t_i + t_j \geq 2t_m$

Sia $\hat{c}$ t.c. $L_{\hat{c}} = L$

- se $\hat{c}$ ha un capito solo, la soluzione è trivial.

- se $\hat{c}$ ha più di un capito.
Sia $\hat{j}$ l'ultimo capito assegnato
a $\hat{c}$.

$\hat{j} \geq m$ (i primi m task sono dati a macchine dist.)

$$L = L_{\hat{c}} = (\underbrace{L_{\hat{c}}}_{L^*} - t_{\hat{j}}) + t_{\hat{j}} \leq \frac{3}{2} L^*.$$

PRE-REC $\wedge$ $\wedge$ D
 L^* $\frac{1}{2} L^*$

$$\textcircled{D} \quad t_{\hat{j}} \leq t_m \leq \frac{1}{2} L^*$$

[NB] L'algoritmo è in realtà $\frac{4}{3}$ -approx.
[Graham 1969]

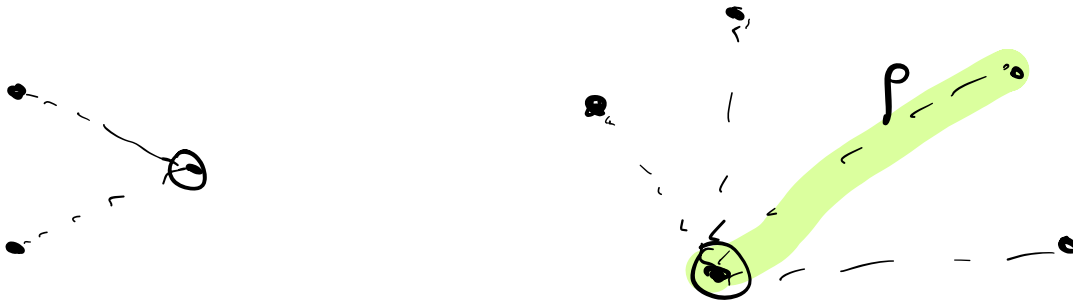
[Hochbaum - Shmoys 1988]

LOAD BALANCING $\in$ PTAS

... π FASOS (D, NP)

CENTER SELECTION PROBLEM

celle di Voronoi



SPACE METRIC (Ω, d)

$$d: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$
- 2) $d(x, y) = 0$ iff $x = y$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$\underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad d(\underline{v}, \underline{w}) = \sqrt{\sum (v_i - w_i)^2}$$

KENTER SELECTION (Ω, d) sp. metrico

- Input: Insieme $S \subseteq \Omega$ di $n > 0$ punti in uno spazio metrico, e un budget $k > 0$
 $C \subseteq S \quad |C| \leq k$
- Sol. accettabile:

$$\text{dist}(x, A) \triangleq \min_{y \in A} d(x, y)$$

$$\forall s \in S \quad \delta_C(s) \triangleq \text{dist}(s, C)$$

$$\rho_C \triangleq \max_{s \in S} \delta_C(s)$$

- Funz. obiettivo: ρ_C
- Tipo: MIN

ALGORITHM

CENTER SELECTION PLUS

INPUT: $S \subseteq \Omega$ ($|S| \leq n > 0$), $k > 0$,
 $\tau \in \mathbb{R}^{>0}$

$C \leftarrow \emptyset$

while $S \neq \emptyset$

take any $\bar{s} \in S$

$C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

remove from S all s t.c.
 $d(s, \bar{s}) \leq 2\tau$

if $|C| \leq k$
output C

else
output "Impossibile"

Teorema 4.1: Se CENTER SELECTION PLUS cnette
un output, esso è una $\frac{2\tau}{p^*}$ -approx.

Dim: $\forall s \in S$ è stato cancellato da S
 $\Rightarrow$ sia $\bar{s}$ il centro scelto
quando abbiamo cancellato
 s

$$\rho_c \leq c(s) \leq 0.5, s -$$

$$\frac{\rho_c}{\rho^*} \leq \frac{2R}{\rho^*}$$

□

Lemma ②: Se $R \geq \rho^*$, l'algoritmo produce un output

Dim: Sia C^* una soluzione ottima.

Sia $\bar{s} \in C$: chiamiamo
 $\bar{c}^* \in C^*$ t.c. nella soluzione
 ottima $\bar{s}$ si rivolge
 a $\bar{c}^*$

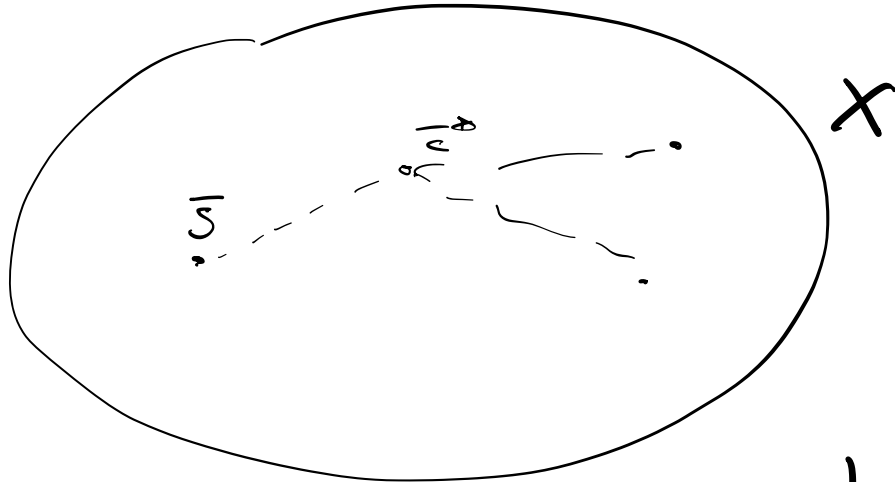
Sia X l'insieme dei punti che
 nella soluzione ottima C^* si rivolgono
 a $\bar{c}^*$.

$\forall s \in X$

$$d(s, \bar{s}) \leq \underbrace{d(s, \bar{c}^*)} + \underbrace{d(\bar{c}^*, \bar{s})} \leq \rho^* \leq 2R$$

⇒ Quando seleziono s , cancello
 tutti i punti di X

⇒ Elimino da S un'intera
 cella di Voronoi di C^*

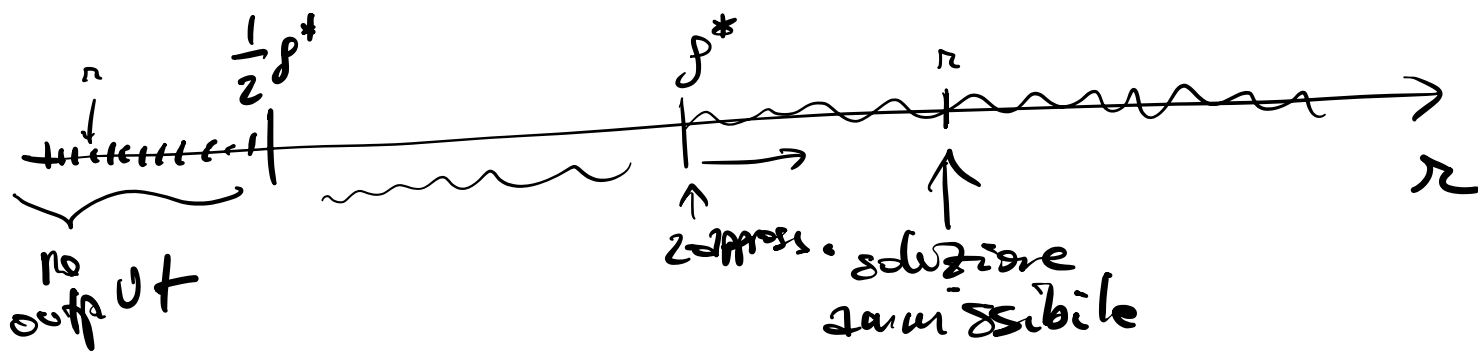


$\Rightarrow$ Dopo $\leq k$ passi ho cancellato tutto

$\Rightarrow$ L'output ha cardinalità $\leq k$ $\square$

$$\frac{2\pi}{p^*} \leq \frac{p^*}{p^*} \leq 1$$

$$\frac{2\pi}{p^*}$$



ALGORITHM

CENTER SELECTION LOS

INPUT: $S \subseteq \Omega$ ($|S| \leq n > 0$), $k > 0$,
 $r \in \mathbb{R}^{>0}$

$C \leftarrow \emptyset$

while

$S \neq \emptyset$

take any $\bar{s} \in S$

$C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

remove from S

$d(s, \bar{s}) \leq 2r$

scopli va
 $\bar{s}$ che sia
a dist. $> 2r$
da C
all s t.c.

if

$|C| \leq k$

output C

else

output "Impossible"

GREEDY CENTER SELECTION

INPUT: $S \subseteq \Omega (|S|=n), k > 0$

if $|S| \leq k$

output S

choose any $\bar{s} \in S$

$C \leftarrow \{\bar{s}\}$

while $|C| < k$

select $\bar{s}$ maximizing $d(\bar{s}, C)$

$C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

output C