PROBLEMA: **MAX INDEPENDENT SET**

INPUT: $G=(V,E)$ non orientati

SOL. AMM.: INSIEMI INDIPENDENTI

$X \subseteq V$ t.c. $\binom{X}{2} \cap E = \emptyset$

FUNZ. OB.: $|X|$

TIPO: MAX

Thm: Per ogni $\varepsilon > 0$, MAX IND SET non è $(2-\varepsilon)$-approssimabile.

Dim: $L \in NP$-completo

$L \in PCP[r(n), q]$ con $r(n) \in O(\log n)$, $q \in \mathbb{N}$.

$z \in 2^*$

$R \in 2^{r(|z|)}$

$$\underbrace{\begin{matrix} i_1^{z,R}, & \dots, & i_q^{z,R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b_1 & & b_q \end{matrix}}$$

Una z-configurazione è

$$\Big(\underset{\substack{\Uparrow \\ 2^{r(|z|)}}}{R},\ \{\underset{\substack{\downarrow\\ \in \mathbb{N}}}{i_1^{z,R}} : \underset{\substack{\downarrow\\ \in 2}}{b_1}, \dots, \underset{\substack{\downarrow\\ \in \mathbb{N}}}{i_q^{z,R}} : \underset{\substack{\downarrow\\ \in 2}}{b_q}\}\Big)$$

Costruisco un grafo non orientato G_z.

<u>Vertici</u>: z-configurazioni accettanti

<u>Lati</u>:

$$(R, \{i_1^{z,R} : b_1, \dots, i_q^{z,R} : b_q\})$$

inconsistenti

$$(R', \{i_1^{z,R'} : b_1', \dots, i_q^{z,R'} : b_q'\})$$

<u>sse</u>

$R = R' \ \vee\ \exists k, k' \in \{1, \dots, q\}$ t.c. $i_k^{z,R} = i_{k'}^{z,R'}$ ma $b_k \neq b_{k'}$

$$2^{r(|z|)} \cdot 2^q$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$: Se $z \in L$, G_z ha un insieme indipendente di dim $\geq 2^{r(|z|)}$

<u>Dim</u>: $\exists \overline{w}$ che fa accettare con probabilità 1.

Prendiamo tutte

$$(R, \{i_1^{z,R} : b_1, \dots, i_q^{z,R} : b_q\})$$

compatibili con $\overline{w}$.
1) Questo insieme di vertici ha dimensione $\geq 2^{r(|z|)}$
2) Sono tutti non collegati da lati. □

$\boxed{\text{Fatto 2}}$: Se ~~z∈L~~, ogni insieme indipendente di G_z ha cardinalità $\leq 2^{r(|z|)-1}$

Dim: Supponete che S sia un insieme indip. di G_z con cardinalità $> 2^{r(|z|)-1}$.
Non può succedere

$$S \ni \begin{matrix} (101, \{2:0, 15:1, 19:0\}) \\ (110, \{2:1, 15:1, 21:0\}) \end{matrix}$$

Da S si può costruire un $\overline{w}$ compatibile con tutti i vertici di S.
$\Rightarrow \overline{w}$ fa accettare con probab. $> \frac{1}{2}$. □

G_z

$\downarrow$

$\boxed{\text{Alg. approssimato per MAX IND SET } < 2-\varepsilon}$

$z \in L$: OTTIMO: $\geq 2^{r(|z|)}$

$z \notin L$: OTTIMO: $< 2^{r(|z|)-1}$

$$\geq \frac{2^{r(|z|)}}{2-\varepsilon} > 2^{r(|z|)-1} = \frac{2^{r(|z|)}}{2}$$

$\square$

STRUTTURE DATI SUCCINTE

ADT (Abstract Data Type)

$\Downarrow$

IMPLEMENTAZIONI

INFORMATION-THEORETICAL LOWER BOUND

Struttura con TAGLIA (100x200)

$n = 20'000$

VALORI POSSIBILI $V_n = 2^{20'000}$

$$
\begin{array}{cccc}
v_1, & v_2, & \ldots, & v_{V_n} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
x_1 & x_2 & & x_{V_n}
\end{array}
\leftarrow \#bit
$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{V_n}}{V_n} \geq \underbrace{\log_2 V_n}_{\text{INF. THEORETICAL LOWER BOUND}}$$

$$\boxed{Z_n \triangleq \log_2 V_n}$$

bit minimi per rappresentare l'ADT

struttura dati che implementa l'ADT e occupa D_n bit

$$D_n \geq Z_n$$

1) implicita

2) succinte

3) compatte

$D_n = Z_n + O(1)$

$D_n = Z_n + o(Z_n)$

$D_n = O(Z_n)$

$Z_n + 3$

$Z_n + \log Z_n$

$Z_n + \sqrt{Z_n}$

STRUTTURA SUCCINTA PER RANK E SELECT

Data $\underline{b} \in 2^n$

$\underline{b}$

0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	1	0	1

p	$\text{rank}_{\underline{b}}(p)$
0	0
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3

k	$\text{select}_{\underline{b}}(k)$
0	1
1	2
2	4
3	6
4	7

6	3
7	4

$$\mathrm{rank}_{\underline{b}}(p) = \left| \{ i \mid i < p \text{ e } b_i = 1 \} \right|$$

$$\mathrm{select}_{\underline{b}}(k) = \max \{ p \mid \mathrm{rank}_{\underline{b}}(p) \leq k \}$$

$$\mathrm{select}_{\underline{b}}(3)$$

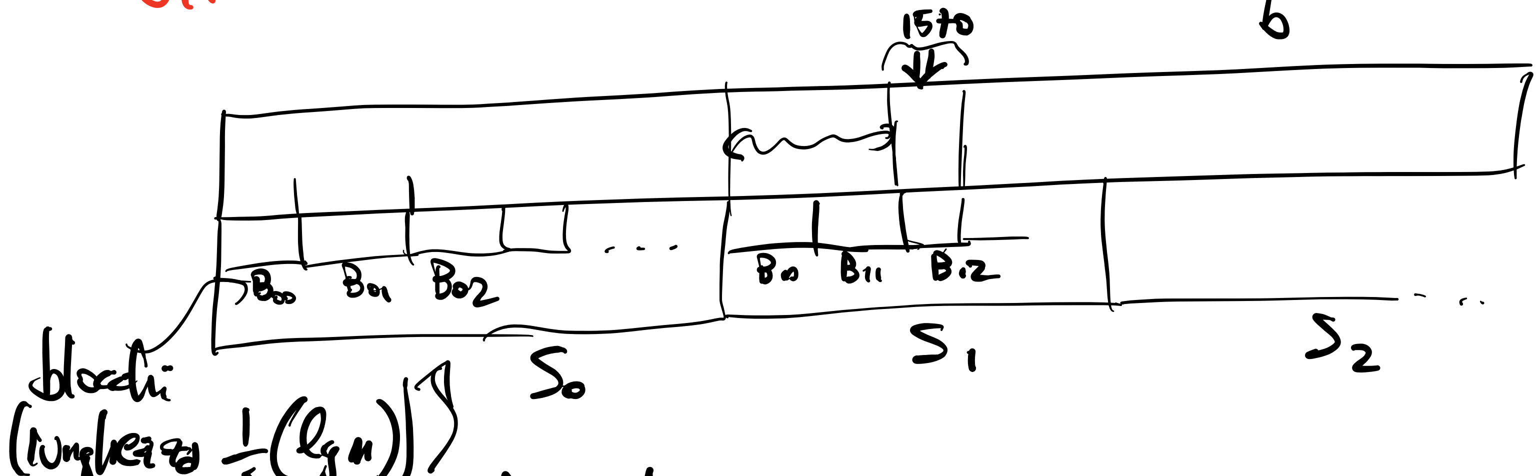
Proprietà:

- $\mathrm{rank}(\mathrm{select}(i)) = i$
- $\mathrm{select}(\mathrm{rank}(p)) \geq p$ — $=$ sse $b_p = 1$

$$V_n = 2^n$$

$$\boxed{Z_n = \log_2 V_n = n}$$

STRUTTURA SUCCINTA DI JACOBSON PER RANK



superblocchi
(lunghezza $(\log n)^2$)

1) Per ogni superblocco S_i memorizza quanti 1 ci sono prima del superblocco

2) Per ogni blocco B_{ij} memorizzo quanti 1 ci sono dall'inizio del superblocco S_i fino al blocco B_{ij} escluso

SUPERBLOCCHI:

$$\frac{n}{(\log n)^2}$$

	quanti 1 ci sono prima
S_0	
S_1	
S_2	

$\log n$

$$\frac{n}{(\log n)^2} \log n = \frac{n}{\log n} = o(n)$$

BLOCCHI:

$$\frac{n}{\frac{1}{2}\log n}$$

B_{00}	...
B_{01}	...
B_{02}	
$\vdots$	
B_{10}	
$\vdots$	

$$\log\left((\log n)^2\right)$$

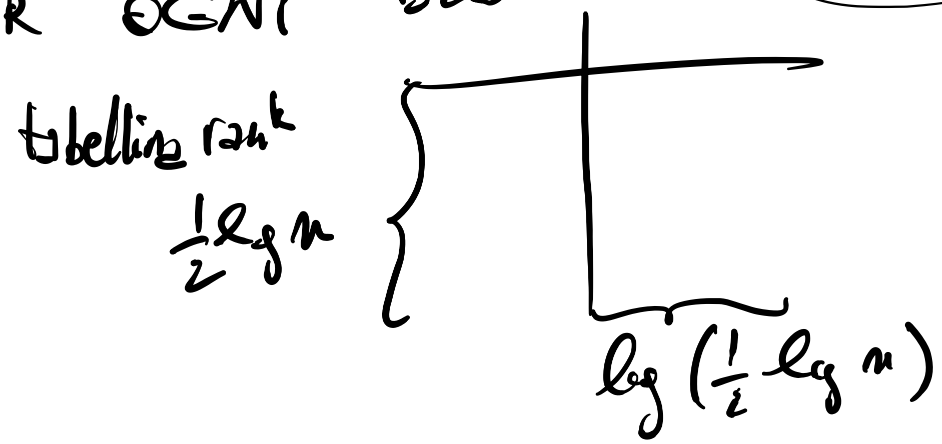
$$\frac{n}{\frac{1}{2}\log n} \, 2 \log\log n =$$

$$= \frac{4 \, n \log\log n}{\log n} = o(n)$$

3) "Four-Russians Trick"

$$2^{\frac{1}{2}\log n}$$

BLOCCHI POSSIBILI
PER OGNI BLOCCO



$$2^{\frac{1}{2}\log n} \, \frac{1}{2}\log n \, \log\left(\frac{1}{2}\log n\right) =$$

$$= \sqrt{n} \, \frac{1}{2}\log n \, \log\log\sqrt{n} = o(n)$$