INAPPROSSIMABILITÀ DEL TSP GENERALE

Teorema: Non esiste $\alpha > 1$ t.c. TSP sia α-approssimabile (se $P \neq NP$)

Dim:

FATTO: Il problema di decidere se un grafo ammette un circuito hamiltoniano è NPc

Supponiamo per assurdo di avere un alg. α-approssimante per TSP.

$G=(V,E)$ ha un circuito hamiltoniano?

$$\downarrow$$

$$G' = \left(V, \binom{V}{2}, d\right)$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x,y\} \in E \\ \lceil \alpha n \rceil + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Se G ha un circuito hamiltoniano, G' ne ha uno di lunghezza $\leq n$.
- Se G non ha un circuito hamiltoniano, qualunque circuito hamiltoniano di G' ha lungh. $\geq \lceil \alpha n \rceil + 1$

G'

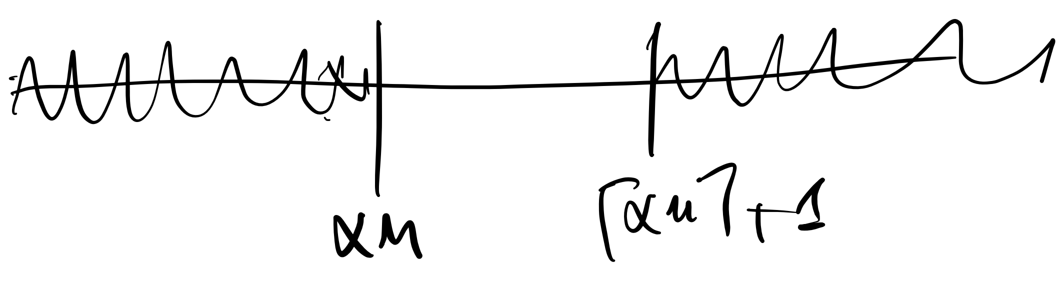
ALGORITMO α-APPROSS. PER TSP

G ha un c.h.

G non ha un c.h.

l'algoritmo emette un output $\leq \alpha n$

l'algoritmo emette un output $\geq \lceil \alpha n \rceil + 1$



$$\alpha n \geq \lceil \alpha n \rceil + 1$$

$$\alpha \geq \frac{\lceil \alpha n \rceil + 1}{n} \geq \frac{\alpha n + 1}{n} =$$

$$= \alpha + \frac{1}{n}$$

impossible.

$\square$

UN PTAS PER 2-LOAD BALANCING

INPUT: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} > 0$

SOL. AMMISSIBILE:

Assegnamento di n a 2 macchine $\alpha : n \to 2$

FUNZ. OBIETTIVO

Massimo carico

$$\max\left(\sum_{i:\alpha(i)=0} t_i \,,\, \sum_{i:\alpha(i)=1} t_i\right)$$

TIPO

MIN

PTAS

INPUT: $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (vogliamo una $1+\varepsilon$ approssimazione)

$\varepsilon > 0$

- IF $\varepsilon \geq 1$
  - Assegna tutti i task alla prima macchina
  - STOP
- Ordina i t_i in ordine decrescente
- **FASE 1**
  - $k \leftarrow \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$
  - si cerca esaustivamente l'assegnamento ottimo dei task $t_0, \dots, t_{k-1}$
- **FASE 2**
  - I restanti task $t_k, \dots, t_{n-1}$ sono assegnati in modo greedy.

Teorema: L'algoritmo è una $(1+\varepsilon)$-approssimazione di 2-LOAD BALANCING.

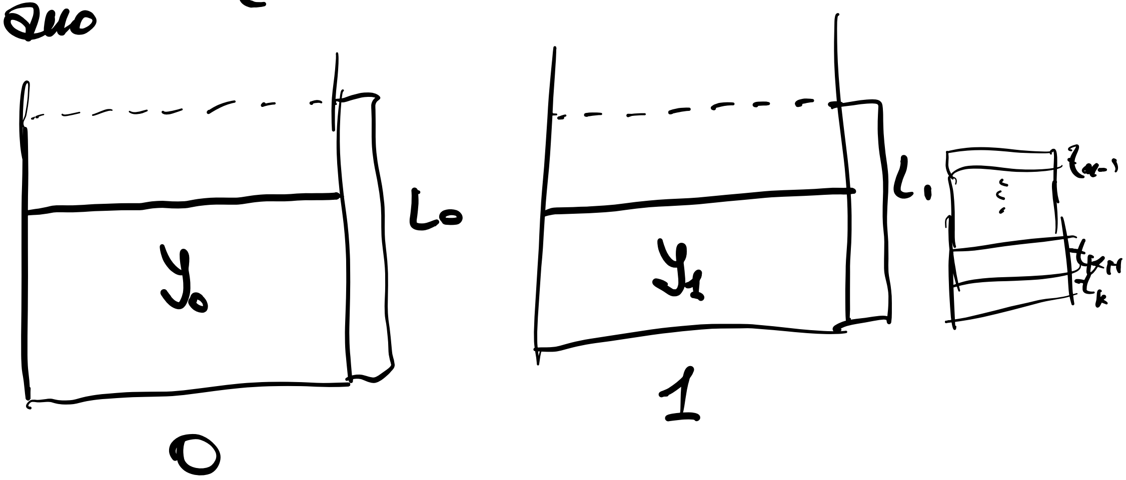
Dim: Se $\varepsilon \geq 1$, ci stiamo accontentando di una 2-approssimazione.

$\boxed{T ::= \sum_{i \in m} t_i}$ $L^* \geq \frac{T}{2}$ $\quad L = T$

$$\frac{L}{L^*} \leq \frac{T}{T/2} = 2.$$

Analizziamo $\varepsilon < 1$.

Alla fine della prima fase y_0, y_1

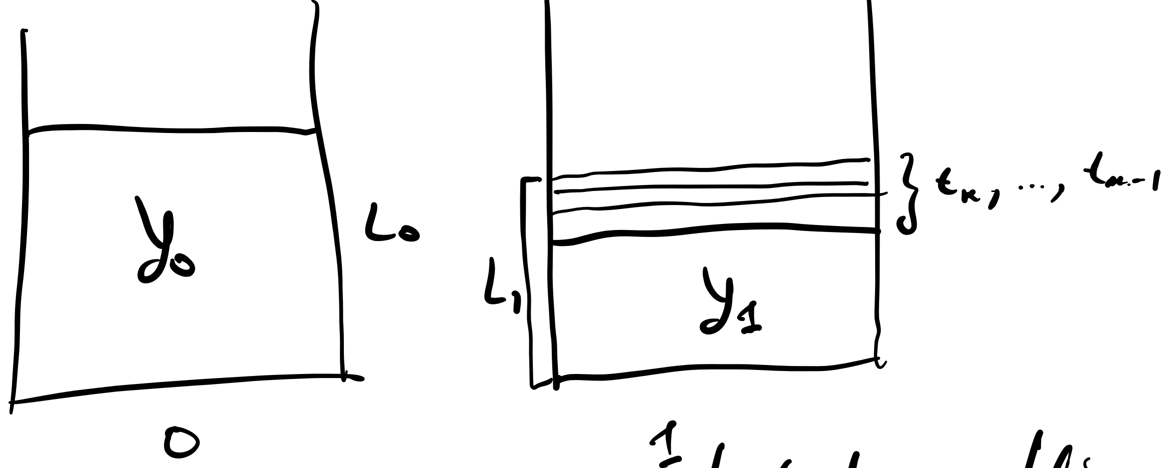


↓

Alla fine della seconda fase L_0, L_1

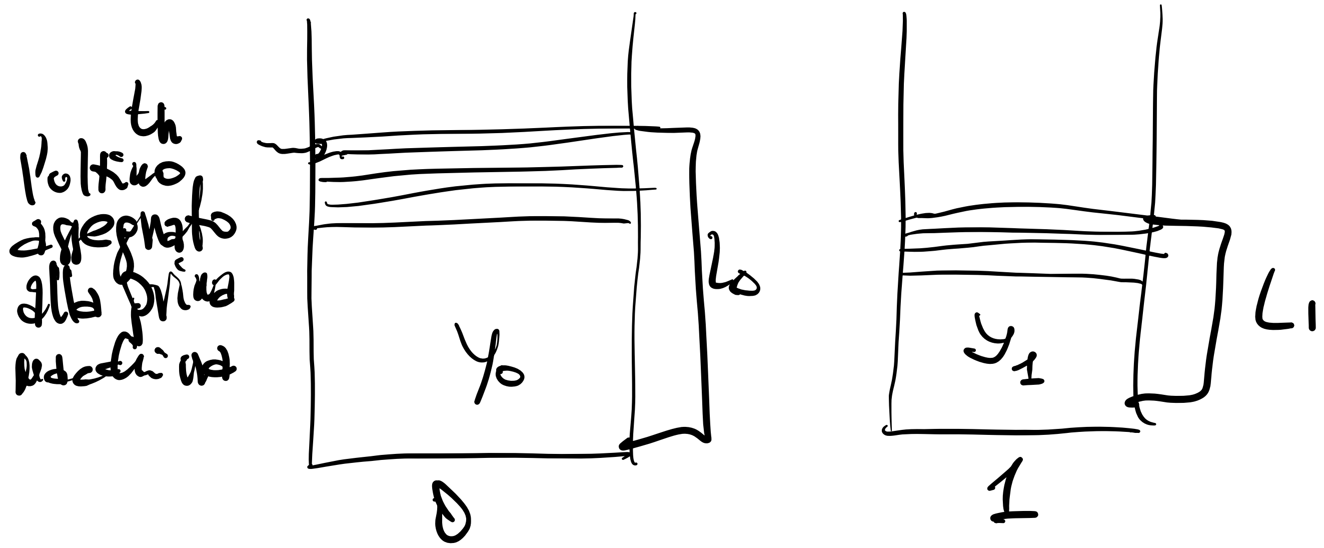
Assumo $L_0 \geq L_1$ s.p.g.

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $L_0 = y_0$



$\Rightarrow$ Assegnamento globale ottimo

$\boxed{\text{CASO 2}}$ Uno o più task fra $t_k, \dots, t_{n-1}$ sono stati assegnati alla prima macchina.



$$L_0 - t_h \le L_1' \le L_1$$

$$2L_0 - t_h \le L_0 + L_1$$

$$L_0 - \frac{t_h}{2} \le \frac{T}{2}$$

$$(*) \qquad L_0 \le \frac{T}{2} + \frac{t_h}{2}$$

$$T = \underbrace{t_0 + t_1 + \dots + t_{k-1} + t_k}_{\geq t_h} + \underbrace{\dots + t_{n-1}}_{\geq 0}$$

$$(**) \quad \geq (k+1)\, t_h$$

$$\frac{T}{2} \geq \frac{(k+1)\, t_h}{2}$$

$$\frac{L}{L^*} = \frac{L_0}{L^*} \leq \frac{L_0}{T/2} \overset{(*)}{\leq} \frac{\frac{T}{2} + \frac{t_h}{2}}{T/2} =$$

$$= 1 + \frac{t_h}{T} \overset{(**)}{\leq} 1 + \frac{t_h}{(k+1)\, t_h} =$$

$$= 1 + \frac{1}{k+1} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1 + 1} =$$

$$= 1 + \varepsilon. \qquad \square$$

Teorema: Il PTAS richiede tempo $O\Big(\underbrace{n \log n}_{\text{ORDINAMENTO}} + 2^{\min(\frac{1}{\varepsilon},\, n)}\Big)$

Dim: Fase 1

$t_0, \dots, t_{k-1}$

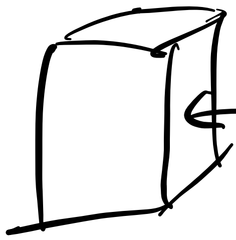
k task

$$2^k = 2^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil} \sim 2^{\frac{1}{\varepsilon}}. \qquad \square$$

KNAPSACK

$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ VALORE

$w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ PESO

 W capacità