PROBLEMA DELLO ZAINO (KNAPSACK)

INPUT: $n > 0$ oggetti

$v_i, w_i \in \mathbb{N}^+$ $i \in n$

$W > 0$ capacità dello zaino

SOL. AMM.: $X \subseteq n$

t.c. $\sum_{i \in X} w_i \le W$

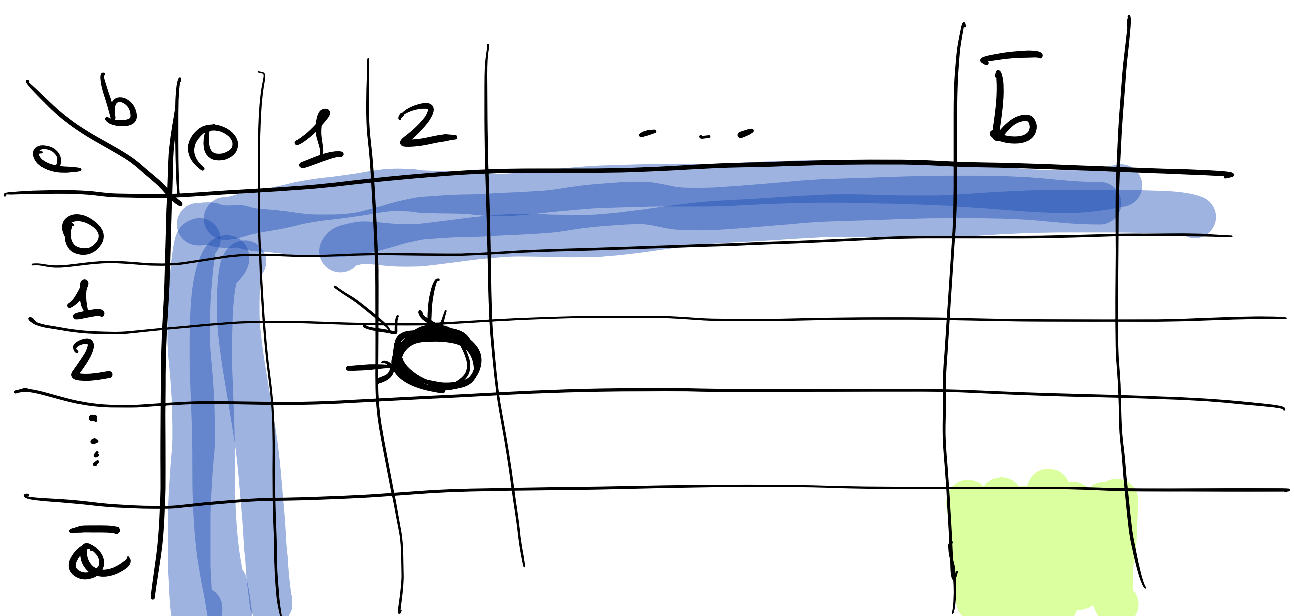
FUNZ. OBIETTIVO: $v = \sum_{i \in X} v_i$

TIPO: MAX

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$$\Pi = \Pi[\bar{a}, \bar{b}]$$

$$\Pi[a, b]$$



PSEUDO-POLINOMIALITÀ

$X \in \mathbb{N} \rightarrow \boxed{\text{PRIMO?}}$

$O(x)$

```
for i:=2; i<x; i++ {
    if x % i == 0 {
        return false
    }
}
return true
```

UNA PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER KNAPSACK (A)

n

$$\left.\begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & \dots & v_n \\ w_0 & w_1 & \dots & w_n \end{array}\right] \text{LUNGHEZZA } O(n)$$

$\underbrace{w_0 \quad w_1 \quad}_{i}$

W

CAP. ZAINO

$w \backslash i$	0	1	2	...	n
0	0	0	0	...	0
1	0				
2	0				

considero gli oggetti fino a $i-1$ compreso

$\vdots$

$W \mid 0$

$v[w, i]$

$v(w, i)$

VALORE MASSIMO CHE RIESCO A PORTARE A CASA

$v(w, i-1)$

$v_{i-1} + v(w - W_{i-1}, i-1)$

$$v(w,i) = \begin{cases} v(w, i-1) & \text{se } w < W_{i-1} \\ \max\big(v(w, i-1),\ v_{i-1} + v(w - W_{i-1}, i-1)\big) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

UN'ALTRA SOLUZIONE MEDIANTE PROGRAMMAZIONE DINAMICA (B)

n° di oggetti

$v \backslash i$	0	1	2	...	n
0	0	0	0		0
1	$+\infty$				
⋮			$\boxed{}\ w(v,i)$		$\boxed{\leq W}$
					$\boxed{\geq W}$
$\sum_i v_i$	$+\infty$				

VALORE CHE VOGLIO PORTARE A CASA

MINIMA CAPACITA' DI UNO ZAINO PER OTTENERE QUEL VALORE

$$w(i,v) = \begin{cases} \min\left(w(v, i-1),\ w_{i-1}\right) & \text{se } v < v_{i-1} \\ \\ \min\left(w(v, i-1),\ w_{i-1} + w(v - v_{i-1}, i-1)\right) \end{cases}$$

APPLICAZIONE DI (B) MEDIANTE SCALING

$$\rightsquigarrow \Pi = (v_i, w_i, W) \qquad \varepsilon \in (0,1]$$

vogliamo una $(1+\varepsilon)$-approssimazione di Π.

$$\vartheta = \frac{\varepsilon\, v_{MAX}}{2n}$$

$$\rightsquigarrow \overline{\Pi} = \left(\bar{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\vartheta} \right\rceil \vartheta,\ w_i,\ W\right)$$

$$\rightsquigarrow \hat{\Pi} = \left(\hat{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\vartheta} \right\rceil,\ w_i,\ W\right)$$

Risolveremo $\overline{\Pi}$ in modo esatto mediante programmazione dinamica (B)

ammissibilità è la stessa in tutti i problemi

$$\begin{cases} \hat{X}^* \subseteq M & \leftarrow \text{SOL. NOSTRA} \\ \overline{X}^* \subseteq M & \leftarrow \\ X^* \subseteq M & \leftarrow \text{SOL. OTTIMA} \end{cases}$$

<u>Oss.</u>: $\overline{X}^* = \hat{X}^*$

(i valori sono moltipl. per una costante)

<u>Lemma</u>: Sia X una soluzione ammissibile.

$$(1+\varepsilon) \sum_{i \in \hat{X}^*} v_i \geq \sum_{i \in X} v_i$$

<u>Dim.</u>: $\sum_{i \in X} v_i \leq \sum_{i \in X} \overline{v_i}$ (ARROTT. PER ECCESSO)

$$\leq \sum_{i \in \overline{X}^*} \overline{v_i} \quad \left(\overline{X}^* \text{ è ottima per } \overline{\Pi} \right)$$

$$\leq \sum_{i \in \overline{X}^*} (v_i + \vartheta) =$$

$$= \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + |\overline{X}^*| \vartheta \leq$$

$$\leq \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + n \vartheta =$$

$$= \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + \cancel{n} \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2 \cancel{n}}$$

$$(*) \quad \sum_{i \in X} v_i \leq \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2}$$

è vera per ogni soluzione ammissibile X.

$X = \{ i_{MAX} \}$ (i_{MAX} è l'indice dell'elemento di valore v_{MAX})

$$v_{MAX} \leq \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2} \leq$$

$$(\varepsilon \leq 1) \quad \leq \sum v_i + \frac{v_{MAX}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{MAX}}{2} \le \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i$$

Quindi $(*)$:

$$\sum_{i \in X} v_i \le \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i + \frac{\varepsilon v_{MAX}}{2}$$

diventa

$$\sum_{i \in X} v_i \le (1+\varepsilon) \sum_{i \in \overline{X}^*} v_i$$

Ricordando che $\overline{X}^* = \hat{X}^*$

$$\sum_{i \in X} v_i \le (1+\varepsilon) \sum_{i \in \hat{X}^*} v_i \qquad \square$$

Teorema: $$(1+\varepsilon) \sum_{i \in \hat{X}^*} v_i \ge v^*$$

Dim: Il lemma

$$(1+\varepsilon) \sum_{i \in \hat{X}^*} v_i \ge \overbrace{\underbrace{\sum_{i \in X} v_i}_{X^*}}^{v^*}$$

Corollario: L'algoritmo è una $(1+\varepsilon)$-approssimazione

$$\vartheta = \frac{\varepsilon v_{max}}{2n}$$

$$\boxed{\text{COMPLESSITÀ}}$$

Dim. matrice:

$$\underbrace{n}_{\text{colonne}} \underbrace{\sum \hat{v}_i}_{\text{Righe}} \leq n^2 \hat{v}_{max} = n^2 \left\lceil \frac{v_{max}}{\vartheta} \right\rceil =$$

$$\geq n \hat{v}_{max}$$

$$= n^2 \left\lceil \frac{2 \cancel{v_{max}} n}{\varepsilon \cancel{v_{max}}} \right\rceil =$$

$$= O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right). \quad \square$$

Polinomiale in n e in ε.

$\Rightarrow$ FPTAS