Lemma 1: $\sum_{e \in E} p_e \le w^*$ $\square$

se $(p_e)_e$ è equo

Lemma 2: Alla fine di PricingVertexCover

$w \le 2 \sum_{e \in E} p_e$

Dim:

$$w = \sum_{i \in output} w_i = \sum_{\substack{i:\, p_e \text{ non} \\ \text{è stretto} \\ \text{su } i}} w_i =$$

$$w_i = \sum_{\substack{e \in E \\ i \in e}} p_e$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in output} \sum_{\substack{e \in E \\ i \in e}}}_{\text{ogni lato compare al massimo due volte}} p_e \le 2 \sum_{e \in E} p_e$$

$\square$

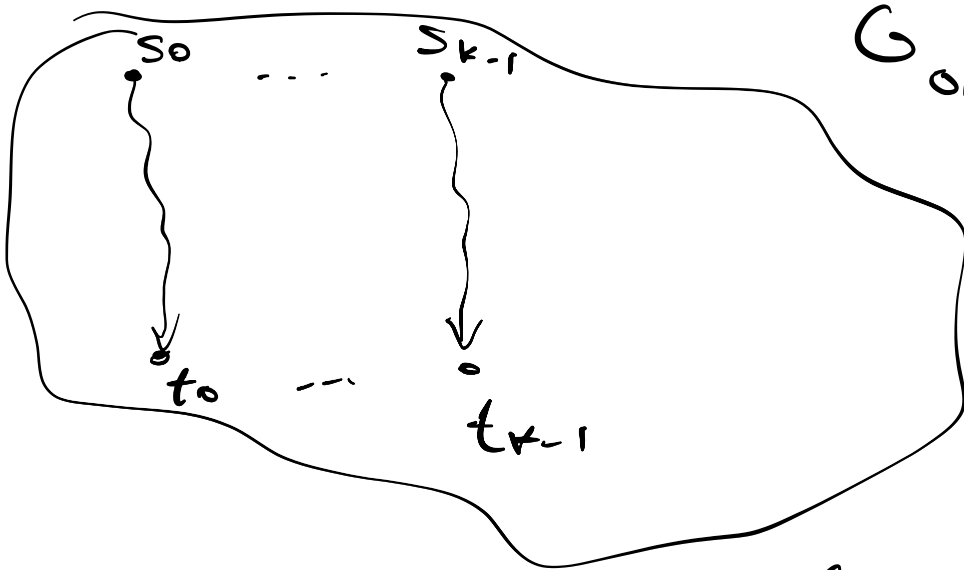
Teorema: PricingVertexCover è una 2-approssimazione

Dim: $2 \sum p_e$ $\quad 2 \sum_{\cancel{e \in E}} p_e$

$$\frac{w}{W^*} \underset{\text{Lemma 2}}{\leq} \frac{\sum_{e \in E} \cdots}{W^*} \underset{\text{Lemma 1}}{\leq} \frac{\cdots}{\sum_{e \in E} p_e} = 2 \qquad \square$$

**NOTA**: Non si conosce una $\gamma$-approssimazione con $\gamma < 2$. Si sa che non esiste un PTAS.

# PROBLEMA DEI CAMMINI DISGIUNTI (DISJOINT PATHS)




G orientato

**INPUT**: $G=(N,A)$ orientato
e $s_0, \dots, s_{k-1}, t_0, \dots, t_{k-1} \in V$
$c \in \mathbb{N}^+$

**OUTPUT**: $I \subseteq k$
e $\forall i \in I$. un cammino $\pi_i : s_i \to t_i$ di G sia
t.c. nessun arco di G sia usato da più di c cammini

**FUNZ. OBIETTIVO**: $|I|$

**TIPO**: MAX

$\ell : A \to \mathbb{R}^{>0}$ $\boxed{m = |A|}$

$\pi = \langle x_1, x_2, \ldots, x_i \rangle$

$$\ell(\pi) = \ell(x_1, x_2) + \ell(x_2, x_3) + \ldots + \ell(x_{i-1}, x_i)$$

---

GREEDY PATHS $[\beta > 1]$

INPUT: $G = (N, A)$ $s_0, \ldots, s_{k-1}$, $t_0, \ldots, t_{k-1} \in N$

$c \in A^+$

- $P \leftarrow \emptyset$ /* Coppie già collegate */
- $I \leftarrow \emptyset$
- $\ell(a) \leftarrow 1$ $\forall a \in A$
- forever
  - find the shortest path $\pi_i : s_i \to t_i$ with $i \notin I$
  - if such path does not exist break
  - $I \leftarrow I \cup \{i\}$

    $P \leftarrow P \cup \{\pi_i\}$

    $\forall a \in \pi_i$
  - $\ell(a) \leftarrow \ell(a) * \beta$

    if $\ell(a) = \beta^c$, remove a

output $I$, $P$

**Def:** In un certo istante dell'esecuzione, un cammino $\pi$ è <u>corto</u> sse $l(\pi) < \beta^c$.

**Def:** In un certo istante un cammino $\pi$ è <u>utile</u> se collega una coppia $i \in I$.

seleziona cammini corti utili $\rightsquigarrow$ seleziona cammini lunghi utili $\rightsquigarrow$ stop

$\bar{l}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $l_{out}$

$\underbrace{\bar{I}, \bar{P}}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\underbrace{I_{out}, P_{out}}$

DOPO L'AGGIUNTA DELL'ULTIMO CAMMINO CORTO

**Lemma 1:** Sia $i \in I^* \setminus I_{out}$. Allora
$$\bar{l}(\pi_i^*) \geq \beta^c$$

**Dim:** $i \in I^* \setminus I_{out}$

$\bar{l}(\pi_i^*) < \beta^c$ IMPOSSIBILE

(non sarebbero finiti i cammini corti utili) $\square$

Lemma 2: $\sum_{a\in A} \bar{\ell}(a) \leq \underbrace{\beta^{c+1}}\ \underbrace{|\mathcal{I}|}_{\downarrow} + m$.

Dim: All'inizio

$$\sum_{a\in A} \ell(a) = m \leq \beta^{c+1} \underbrace{|\mathcal{I}|} + \overset{\uparrow}{m}.$$

Supponiamo che

$$\ell_1 \xrightarrow[i,\ \pi_i]{} \ell_2 \rightsquigarrow \bar{\ell}$$

$$\ell_2(a) = \begin{cases} \ell_1(a) & a \notin \pi_i \\ \ell_1(a)\beta & a \in \pi_i \end{cases}$$

$$\sum_{a\in A} \ell_2(a) - \sum_{a\in A} \ell_1(a) =$$

$$= \overline{\sum_{a\notin \pi} (\ell_2(a) - \ell_1(a))} + \underline{\sum_{a\in\pi} (\ell_2(a) - \ell_1(a))} =$$

$$= \sum_{a\in\pi} (\beta\ell_1(a) - \ell_1(a)) =$$

$$= (\beta-1) \sum_{a\in\pi} \ell_1(a) = (\beta-1)\ell_1(\pi) <$$

$$< (\beta-1)\beta^c \le \beta^{c+1} \qquad \square$$

Osservazioni:

1) $$\sum_{i\in I^*\setminus I_{out}} \bar{\ell}(\pi_i^*) \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} \beta^c |I^*\setminus I_{out}|$$

2) Nella soluzione ottima, nessun arco è usato più di $c$ volte.

$$\sum_{i\in I^*\setminus I_{out}} \bar{\ell}(\pi_i^*) \le c \sum_{a\in A} \bar{\ell}(a) \overset{\text{Lemma 2}}{\le}$$

$$\le c\left(\beta^{c+1}|\bar{I}| + m\right)$$

$$\beta^c|I^*| \le \underbrace{\beta^c|I^*\setminus I_{out}|}_{\text{Oss. 1}} + \underbrace{\beta^c|I^*\cap I_{out}|}\le$$

$$\le \underbrace{\sum_{i\in I^*\setminus I_{out}} \bar{\ell}(\pi_i^*)}_{\text{Oss. 2}} + \beta^c|I_{out}| \le$$

$$\le c\left(\beta^{c+1}|\underbrace{\bar{I}}|+m\right) + \beta^c|I_{out}|$$

$$\le \underbrace{c\left(\beta^{c+1}|I_{out}|+m\right)+\beta^c|I_{out}|}$$

Divido per $\beta^c$:

$$|I^*| \le c\beta|I_{out}| + \frac{cm}{\beta^c} + |I_{out}| \le$$

$$\leq c\beta |I_{out}| + \frac{cm}{\beta^c}|I_{out}| + |I_{out}|$$

$$= |I_{out}| \left( \underbrace{c\beta + \frac{cm}{\beta^c}} + 1 \right)$$

Quindi

$$\frac{|I^*|}{|I_{out}|} \leq \underbrace{c\left(\beta + m\beta^{-c}\right) + 1}_{(*)}$$

Ponendo $\beta = m^{\frac{1}{c+1}}$

$$\frac{|I^*|}{|I_{out}|} \leq c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{1-\frac{c}{c+1}}\right) + 1 =$$

$$= c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{\frac{1}{c+1}}\right) + 1 =$$

$$= 2c\, m^{\frac{1}{c+1}} + 1$$

Teorema: GREEDY PATH fornisce una $\left(2c\, m^{\frac{1}{c+1}} + 1\right)$-approssimazione per DISJOINT PATHS

$c$ |

| | |
|---|---|
| 1 | $2\sqrt{n}+1$ |
| 2 | $4\sqrt[3]{n}+1$ |
| 3 | $6\sqrt[4]{n}+1$ |
| ... | .... |