VERTEX COVER VIA ROUNDING

PROGRAMMAZIONE LINEARE (LP)

- INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$
- SOL. AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Q}^n$ t.c.

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

- FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$
- TIPO: MIN

$LP \in PO$

(Algoritmo di Karmarkar 1984)

PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (ILP)

- INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$
- SOL. AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

- FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$
- TIPO: MIN

$ILP \in NPO_c$

PROGRAMMAZIONE LINEARE PER VERTEX COVER

INPUT: π $\quad G=(V,E)$ non orientato

$w_i \in \mathbb{Q}^{>0} \quad i \in V$

$ILP(\pi) \quad \underline{x} \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{cases} x_i + x_j \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \\ x_i \geq 0 & \forall i \in V \\ x_i \leq 1 & \forall i \in V \end{cases}$$

$\sum_{i \in V} w_i x_i \quad$ MIN

$LP(\pi) \quad \underline{x} \in \mathbb{Q}^n$

STESSI VINCOLI, STESSA FUNZ. OBIETTIVO

$\pi = (V,E), w_i \rightsquigarrow \underset{w^*_{ILP}}{ILP(\pi)} \to \underset{w^*_{LP}}{LP(\pi)} \xrightarrow{\underline{x}^*} \text{ROUND} \to \underline{\hat{x}}$

LP se $x_i^* < 1$

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \text{se } x_i^* \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lemma 1: $W^*_{LP} \leq W^*_{ILP}$.

Dim: Il problema rilassato ha un superinsieme di soluzioni ammissibili. $\square$

Lemma 2: $\hat{x}$ è una soluzione ammissibile di $ILP(\pi)$.

Dim:

$$? \begin{cases} \hat{x}_i + \hat{x}_j \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \\ 0 \leq \hat{x}_i \leq 1 & \forall i \in V \end{cases}$$

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i^* < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x_i^* \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

so che

$$\begin{cases} x_i^* + x_j^* \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \\ 0 \leq x_i^* \leq 1 & \forall i \in V \end{cases}$$

l'unico caso in cui

$\hat{x}_i + \hat{x}_j \ngeq 1 \qquad \{i,j\} \in E$

& che

$\hat{x}_i + \hat{x}_j = 0 \qquad \{i,j\} \in E$

$\Rightarrow \quad \hat{x}_i = 0 \quad \hat{x}_j = 0$

$\Rightarrow \quad x_i^* < \frac{1}{2} \quad x_j^* < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x_i^* + x_j^* < 1$ IMPOSSIB.

$\square$

Lemma 3: $\forall i \quad \hat{x}_i \leq 2x_i^*$

Dim: $\hat{x}_i = 0 \Rightarrow x_i^* < \frac{1}{2}$

$0 \leq 2 \cdot \frac{1}{2}$

$\hat{x}_i = 1 \Rightarrow x_i^* \geq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$2x_i^* \geq 1 = \hat{x}_i$

$\square$

Lemma 5:

$$W = \sum_i w_i \hat{x}_i \overset{\text{Lemma 3}}{\leq} 2 \underbrace{\sum_i w_i x_i^*}_{\text{Lemma 4}} = 2W^*_{LP}$$

$$\frac{W}{W^*_{ILP}} \underset{W^*_{LP} \leq W^*_{ILP}}{\overset{\text{lemma 1}}{\leq}} \frac{W}{W^*_{LP}} \leq \frac{2W^*_{LP}}{W^*_{LP}} = 2$$

Algoritmo di arrotondamento è una 2-approssimazione per VERTEX COVER.