COSE

1) Chain rule

$$P[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_n] =$$
$$= P[\mathcal{E}_1]\, P[\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1] \dots P[\mathcal{E}_n \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}]$$

2) $\forall x > 1$

$$\frac{1}{4} \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \leq \frac{1}{e}$$

3) Union bound

$$P\Big[\bigcup_i \mathcal{E}_i\Big] \leq \sum_i P[\mathcal{E}_i]$$

4) Disuguaglianza di Markov

$$P[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

X v.aleatoria non negativa e con media finita

$\alpha > 0$

5) $\forall x \in [0, 1]$

$$1 - x \leq e^{-x}$$

PROBLEMA DI SET COVER

INPUT: $S_0, \dots, S_{m-1}$ $\quad \bigcup_{i \in m} S_i = U$

con pesi $w_0, \dots, w_{m-1} \in \mathbb{Q}^+$

SOL. ACCETTABILI: $I \subseteq m$

t.c. $\bigcup_{i \in I} S_i = U$

FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in I} w_i$

$n \triangleq |U|$

TIPO: MIN

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{ILP}}$

Π

$x_0, \dots, x_{m-1}$

$\min \; w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_m x_m$

$$\begin{cases} 0 \leq x_j \leq 1 & \forall j \in m \\ \sum_{i : p \in S_i} x_i \geq 1 & \forall p \in U \end{cases}$$

$\hat{\Pi}$ LP

$\boxed{\text{ALGORITMO}}$ $\quad k$ parametro intero

- Costruiamo Π
- Risolviamo la sua versione rilassata $\hat{\Pi} \to \hat{x}$

- $I \leftarrow \emptyset$

<u>for</u> $i \in m$

for $t = 1, \dots, \lceil k + \ln n \rceil$

con probabilità $\hat{x}_i$

aggiungiamo i a I

- Output I

<u>Teorema</u>: L'algoritmo

1) produce una soluzione ammissibile con probabilità $\geq 1 - e^{-k}$

2) per ogni $\alpha \in (0, 1)$

$$P[\text{fatt. approssimazione} \geq \alpha (k + \ln n)] \leq \frac{1}{\alpha}$$

<u>Dim</u>:

Notazione

$w_0, \dots, w_{m-1}$ $\quad \bigcup_{j \in m} S_j = U \quad |U| = n$

$S_0, \dots, S_{m-1}$

Π

k

Π $\quad \hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{m-1} \in [0, 1]$

$\hat{w} = w_0 \hat{x}_0 + \dots + w_{m-1} \hat{x}_{m-1}$

w^*

$\hat{w} \leq w^*$

Ovviamente $\hat{w} \leq w$.

$\boxed{1}$ $P[\text{sol. ammissibile}] =$

$= 1 - P[\text{sol. non ammissibile}] =$

$= 1 - P[\text{almeno un punto di } U \text{ non sia coperto}] =$

$\boxed{\mathcal{E}_p = \text{"il punto } p \in U \text{ non è coperto"}}$

$= 1 - P\left[\bigcup_{p \in U} \mathcal{E}_p\right] \geq$ union bound

$\geq 1 - \sum_{p \in U} P[\mathcal{E}_p] =$

$= 1 - \sum_{p \in U} P[p \text{ non sia coperto}] =$

$= 1 - \sum_{p \in U} \left(\prod_{\substack{i \in m \\ p \in S_i}} P[i \text{ non è stato scelto}] \right) =$

$= 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \in m \\ p \in S_i}} (1 - \hat{x}_i)^{\lceil k + \ln n \rceil} \geq$

$1 - x \leq e^{-x}$

$\geq 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \in m \\ p \in S_i}} (1 - \hat{x}_i)^{k + \ln n} \geq$

$\geq 1 - \sum_{p \in U} \prod_{\substack{i \in m \\ p \in S_i}} e^{-\hat{x}_i (k + \ln n)} =$

$$= 1 - \sum_{p \in U} e^{-(k+\ln n)\sum_{\substack{i \in m \\ p \in S_i}} x_i} \geq$$

$\Leftarrow \geq 1$ vincolo LP

$$\geq 1 - \sum_{p \in U} e^{-(k+\ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{p \in U} \frac{1}{n} e^{-k} \geq$$

$|U| = n$

$$= 1 - e^{-k} \sum_{p \in U} \frac{1}{n} =$$

$$= 1 - e^{-k}.$$

$\boxed{2}$ La probabilità che S_i venga scelto è $\leq (k + \ln n)\hat{x}_i$ (per union bound)

$$E[w] = \sum_{i \in m} w_i \, P[S_i \text{ sia scelto}] \leq$$

$$\leq \sum_{i \in m} w_i \, (k + \ln n)\hat{x}_i =$$

$$= (k + \ln n) \boxed{\sum_{i \in m} w_i \hat{x}_i} =$$

$$= (k + \ln n)\, \hat{w} \leq (k + \ln n)\, w^*$$

$$\boxed{P[X \geq \beta] \leq \frac{E[X]}{\beta}}$$

disuguaglianza di Markov

$$\beta := \alpha (K + \ln n)\, w^*$$

$$P\left[\frac{w}{w^*} \geq \alpha (K + \ln n)\right] =$$

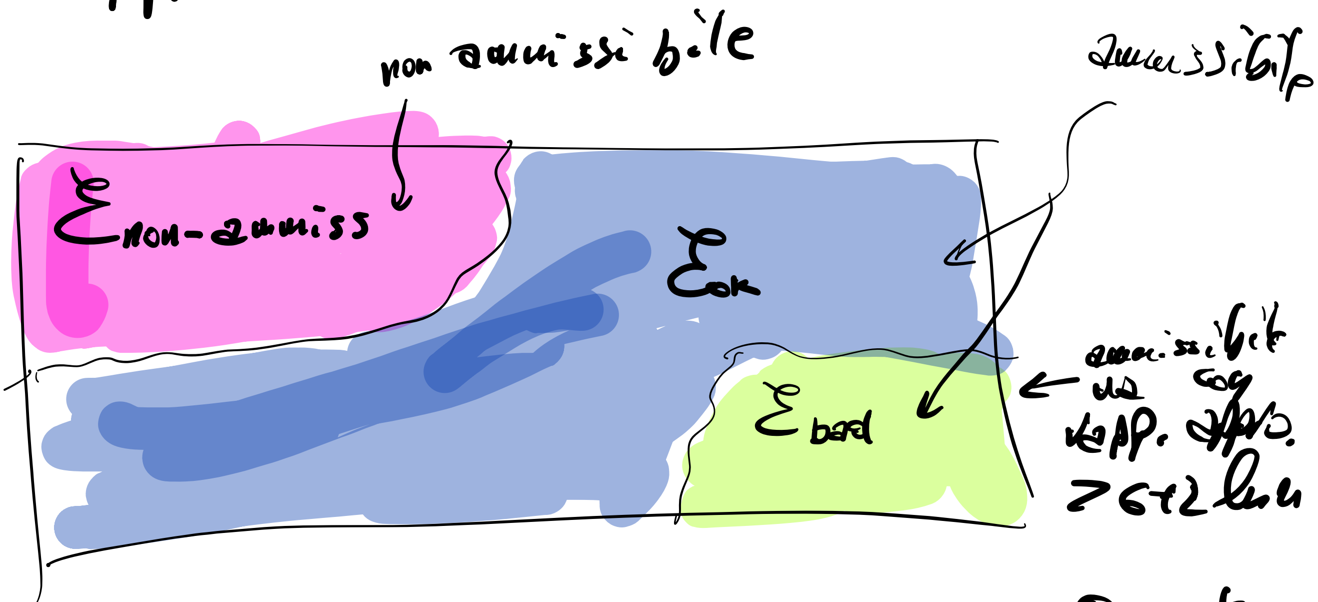
$$= P\left[w \geq \alpha (K + \ln n)\, w^*\right] = P[w \geq \beta]$$

$$\underset{\text{Dis. Markov}}{\leq} \frac{E[w]}{\beta} \leq \frac{(K + \ln)\, w^*}{\alpha (K + \ln)\, w^*} = \frac{1}{\alpha}$$

$\square$

<u>Corollario</u>: Per $K = 3$, c'è il 45% di prob. di ottenere una soluz. ammissibile con rapp. di approx. $\leq 6 + 2 \ln n$

<u>Dim.</u>:



$$P[\mathcal{E}_{non-ammiss}] \leq e^{-k} = e^{-3}$$ ← Teorema 1 con $k=3$

$$P[\mathcal{E}_{bad}] = P[f_{att.appr.} > 6+2\ln n] \leq \frac{1}{2}$$

Teorema 2 con $k=3$, $\alpha=2$

unione bound

$$P[\mathcal{E}_{ok}] = 1 - P[\mathcal{E}_{non-ammiss} \cup \mathcal{E}_{bad}] \geq$$

$$\geq 1 - \left(P[\mathcal{E}_{non-amm}] + P[\mathcal{E}_{bad}]\right) \geq$$

$$\geq 1 - \left(e^{-3} + \frac{1}{2}\right) \approx 45\%$$

$\square$