PROBLEMA Max E_k SAT $(k \geq 3)$

INPUT: Formula CNF in cui ogni clausola contiene esattamente k letterali

LETTERALE

$$(\underbrace{x_1 \vee \dots \vee \neg x_i}_{k}) \wedge (\qquad) \wedge (\dots)$$

T

CLAUSOLE

SOL. AMMISSIBILI: Assegnamenti di valori di verità

FUNZ. OBIETTIVO: # CLAUSOLE true

TIPO: MAX

ALGORITMO PROBABILISTICO

- Assegna a ogni variabile un valore a caso $\in \{true, false\}$

Teorema: Questo algoritmo data una formula con t clausole, ne rende vere almeno

$$\frac{2^k - 1}{2^k} t$$

Cioè $E[T] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$.

Dim: Sia φ l'input,

- n n° variabili che compaiono $(x_1, \dots, x_n)$
- k n° di letterali per clausola
- $K_1, \dots, K_t$ clausole

Variabili aleatorie $(i = 1, \dots, n)$

1) $X_i \sim Unif(\{0, 1\})$ — 0 false, 1 true

2) $C_j = \begin{cases} 1 & \text{se } K_j \text{ è soddisfatta} \\ 0 & \text{se } K_j \text{ non è soddisfatta} \end{cases}$ $(j = 1, \dots, t)$

3) $T = \#$ clausole soddisfatte

$$E[T] = \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{b_n \in \{0,1\}} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n] \, P[X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]$$

Teorema delle prob. totali

$$= \sum \dots \sum E[C_1 + \dots + C_t \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]$$

$$= \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{b_n \in \{0,1\}} E[C_1 + \dots + C_t \mid X_1 = b_1, \dots]$$

$$\underbrace{\underbrace{P[X_1 = b_1]}_{1/2} \cdots \underbrace{P[X_n = b_n]}_{1/2}}_{\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1} \cdots \sum_{b_n} E[C_1 + \dots + C_t \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]$$

$$= \frac{1}{2^n} \underbrace{\sum_{b_1} \cdots \sum_{b_n}} \sum_{j=1}^{t} \underbrace{E[C_j \mid X_1 = b_1, \dots, X_n = b_n]}_{X_1 = 0,\, X_2 = 0,\, X_3 = 1, \dots} =$$

$$K_j = x_{i_1}^{\pm 1} \vee \dots x_{i_k}^{\pm 1}$$

FALSE $+1$

TRUE -1

2^{n-k}

$x \vee \neg y \vee z$

Ci sono 2^{n-k} modi per rendere K_j falsa.

Ci sono $2^n - 2^{n-k}$ rendo K_j vera.

MOLTIPLICO SOPRA E SOTTO 2^{k-n}

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{t} (2^n - 2^{n-k}) = \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n} t =$$

$$2^{k-n}\, 2^n - 2^{k-n} \cdot 2^{n-k}$$

$$= \frac{\dots}{2^{k-n} \cdot 2^{n}} t =$$

$$= \boxed{\frac{2^k - 1}{2^k} t} \qquad \square$$

Lemma: Per ogni $j = 0, \dots, n$

esistono $b_1, \dots, b_j \in \{0,1\}$ t.c.

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

dove t è il numero di clausole

Dim: Per induzione su j.

Per $j = 0$: Teorema.

Passo induttivo:

$$\frac{2^k-1}{2^k} t \overset{\text{IP. INDUZ.}}{\leq} E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}] =$$

$$= E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 0] \, P[X_j = 0] +$$

$$E[T \mid X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 1] \, P[X_j = 1] = (A)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(E[T \mid x_1, \dots, x_{j-1}, \ x_j = 0] + E[T \mid x_1, \dots, x_{j-1}, \ x_j = 1] \Big)$$

P.a.

$$A < \frac{2^k - 1}{2^k} t \qquad B < \frac{2^k - 1}{2^k} t \qquad < \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot 2t < \frac{2^k - 1}{2^{k-1}}$$

$\Rightarrow$ Almeno uno dei due deve essere $\geq$ $\square$

Corollario: Esiste un assegnamento deterministico che soddisfa almeno

$$\frac{2^k - 1}{2^k} t$$

clausole $\square$

INPUT : Formula k-CNF

$K_1 \wedge \dots \wedge K_t$, n

Variabili $x_1, \dots, x_n$

$D \leftarrow \emptyset$

for $i = 1, \dots, n$

$\quad \Delta_0 \leftarrow 0$

$\quad \Delta_1 \leftarrow 0$

$\quad \Delta_{D0} \leftarrow \emptyset$

$\quad \Delta_{D1} \leftarrow \emptyset$

$\quad$ **for** $j = 1, \dots, t$

$\quad\quad$ **if** $j \in D$ **continue**

$\quad\quad$ **if** x_i non compare in K_j **continue**

$\quad\quad h \leftarrow$ numero di variabili in K_j con indice $\geq i$

$\quad\quad$ **if** x_i compare positivo in K_j

$$\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 - \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_{D_1} \leftarrow \Delta_{D_1} \cup \{j\}$$

$\quad\quad$ **else**

$$\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 + \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 - \frac{1}{2^h}$$

$i = 3$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3$

false false

$\Delta_{D_0} \leftarrow \Delta_{D_0} \cup \{j\}$

<u>if</u> $\Delta_0 \geq \Delta_1$

$x[i] =$ false

$D \leftarrow D \cup \Delta_{D_0}$

<u>else</u>

$x[i] =$ true

$D \leftarrow D \cup \Delta_{D_1}$

Output $x[1], \dots, x[n]$

CASO x_i compare positivo

Valore di C_j

$$\Delta_1 = \frac{2^h - 1}{2^h} \xrightarrow{x_i = \text{true}} 1$$

$$\Delta_0 = \frac{2^h - 1}{2^h} \xrightarrow{x_i = \text{false}} \frac{2^{h-1} - 1}{2^{h-1}}$$

$$\Delta_1 = 1 - \frac{2^h - 1}{2^h} = \frac{2^h - 2^h + 1}{2^h} = \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_0 = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} - \frac{2^{n}-1}{2^{n}} =$$

$$= \frac{2^{n} - 2 - 2^{n} + 1}{2^{n}} = -\frac{1}{2^{n}}$$