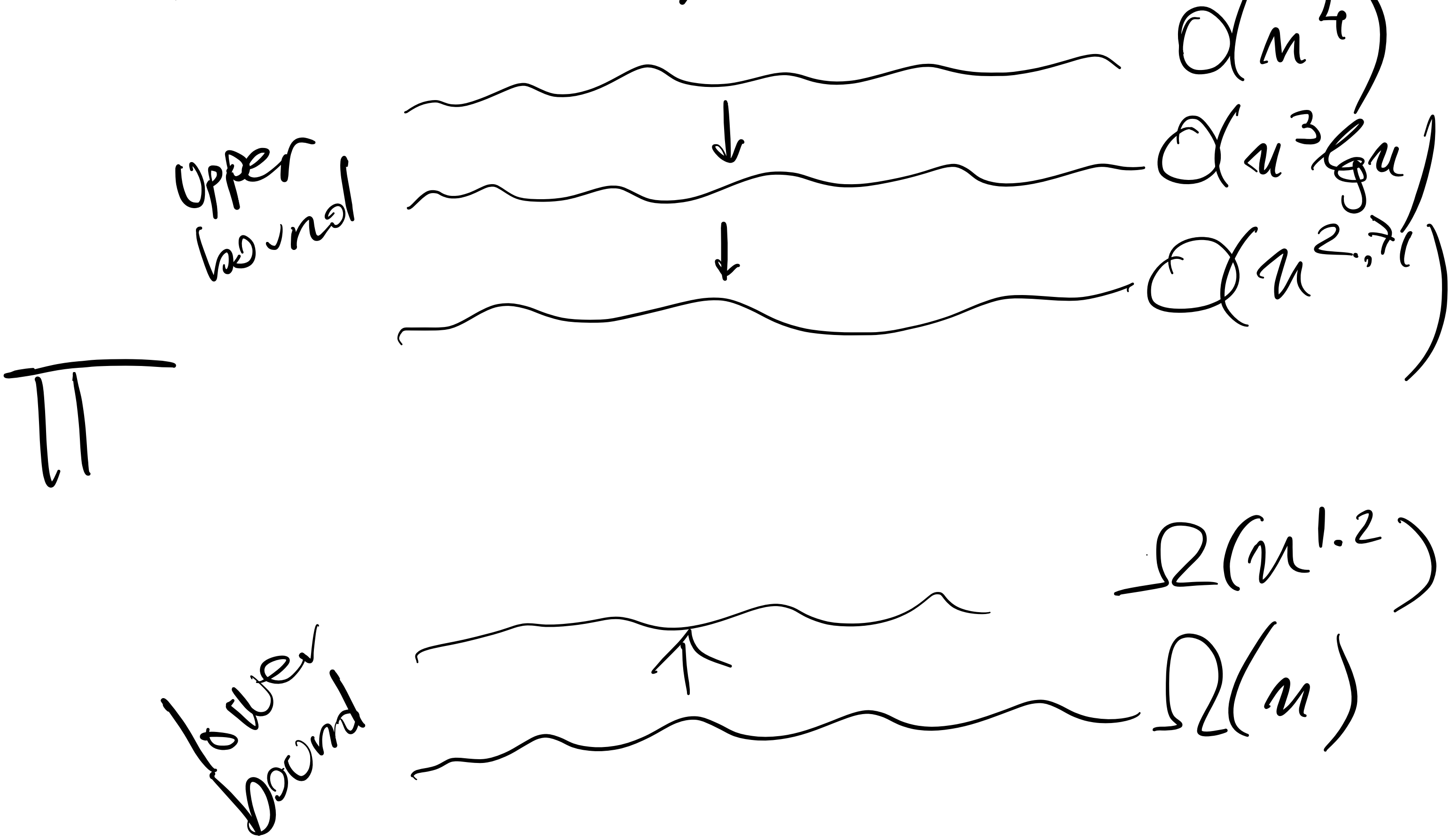
Fissato Π, qual è la complessità di Π?
(la complessità del miglior algoritmo che lo risolve)



$\boxed{\text{Classe P}}$

$\Pi \overset{?}{\in} P$

problemi di decisione risolvibili in tempo polinomiale

$\boxed{\text{Classe NP}}$

problemi di decisione risolvibili in tempo polinomiale su macchine non-deterministiche

$x = ?$

V y $x \; \exists y$

N se no tutti 1

$\boxed{\text{CNF SAT}}$

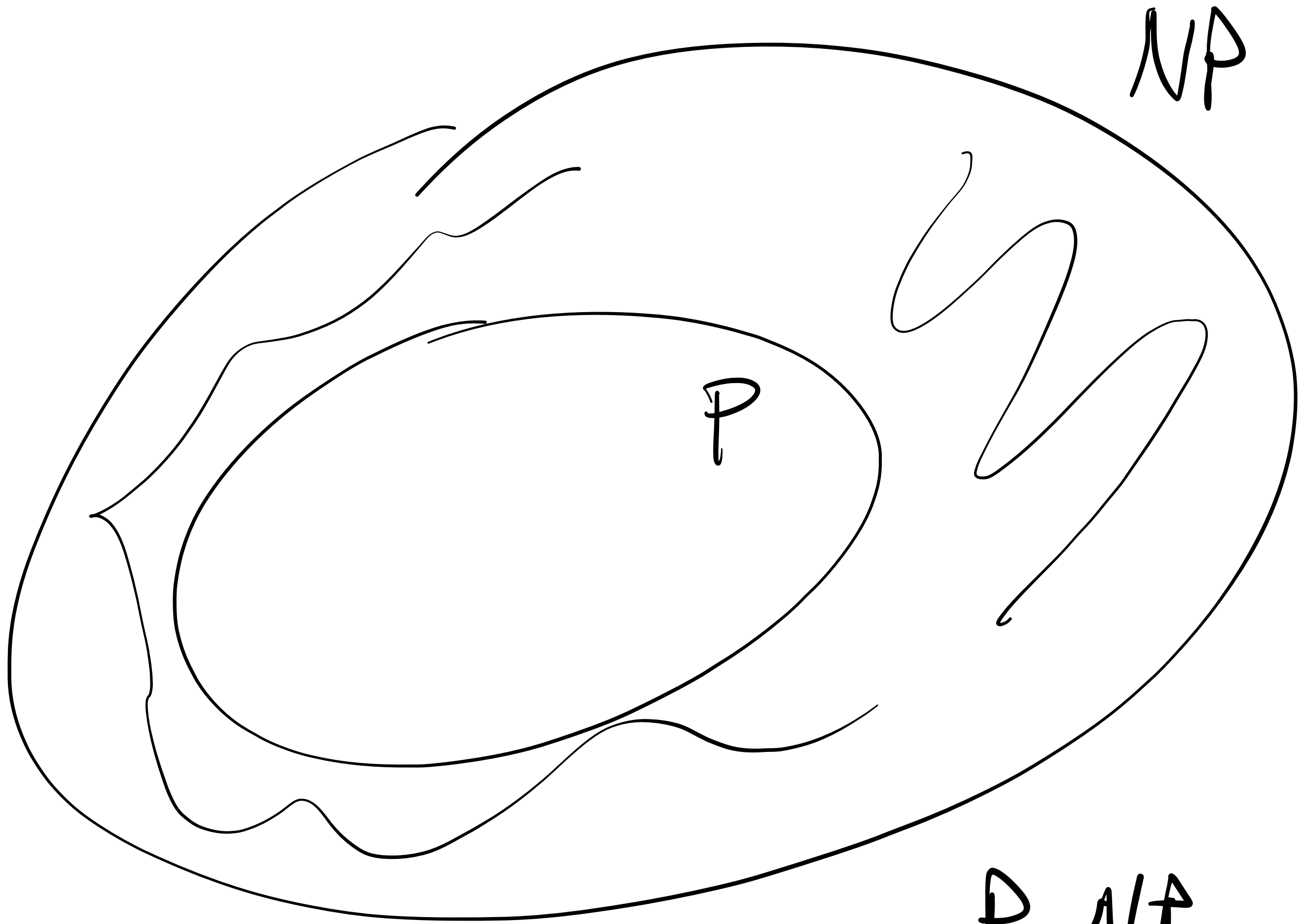
$$\varphi = \underbrace{(x_7 \vee \neg x_2)}_{\text{clausole}} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overbrace{\neg x_5}^{\text{letterali}} \vee \neg x_7)}_{\text{clausole}} \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$$

$\downarrow$

φ è soddisfacibile
($\exists$ assegnazione che rende φ True)

CNF SAT $\overset{?}{\in}$ P

CNF SAT $\in$ NP



$P = NP$

$P \stackrel{?}{=} NP$

$P \subset NP$

RIDUZIONE IN TEMPO POLINOMIALE

$$\Pi_1 \leq_p \Pi_2$$

sse $\exists f : I_{\Pi_1} \to I_{\Pi_2}$ in tempo calcolabile in tempo polinomiale e

t.c.

$x \in I_{\Pi_1}$ $\quad Sol_{\Pi_1}(x) = yes$

sse $Sol_{\Pi_2}(f(x)) = yes$

Teorema: se $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ e $\Pi_2 \in P$

allora $\Pi_1 \in P$

Teorema di Cook:

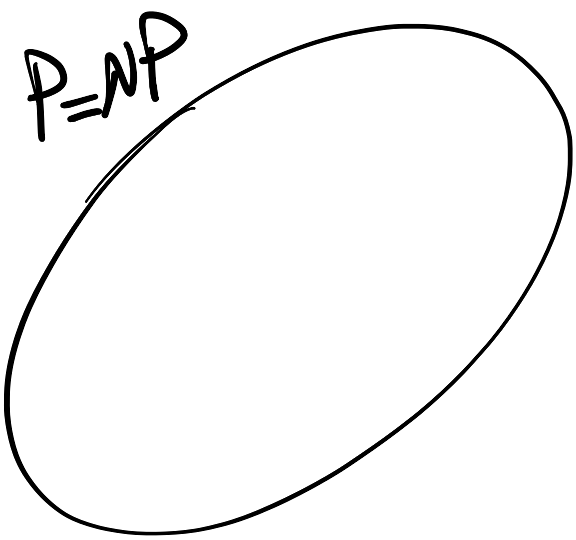
$CNFSAT \in NP$

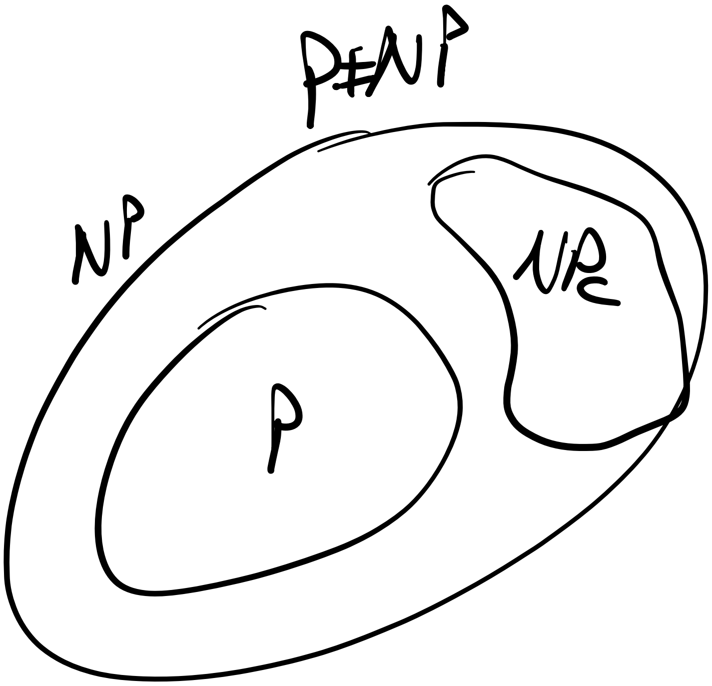
e $\forall \Pi \in NP \quad \Pi \leq_p CNFSAT$

$$NP_c = \{ \Pi \in NP \mid \forall \Pi' \in NP \quad \Pi' \leq_p \Pi \}$$

Corollario:

Se $\Pi \in NP_c$ e $\Pi \in P$ allora $P = NP$





PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

Π

1) input $\quad I_\Pi \subseteq 2^*$

2) $Amm_\Pi : I_\Pi \to 2^{2^*} \setminus \{\emptyset\}$

mappa ogni input in un insieme di soluzioni ammissibili

3) $c_\Pi : 2^* \times 2^* \to \mathbb{N}$

$\forall x \in I_\Pi \quad \forall y \in Amm_\Pi(y)$

$c_\Pi(x, y)$ costo/guadagno

funzione obiettivo

4) $T_\Pi \in \{MIN, MAX\}$

$\boxed{\text{ESEMPIO: MAX SAT}}$

- Input: formule logiche in CNF

$$\varphi = (x_7 \vee \neg x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_7) \wedge (x_9 \vee \neg x_2)$$

- Soluzioni ammissibili per φ sono tutti gli assegnamenti delle variabili di φ

- $c_\pi(\varphi, ass) = \#$ clausole rese vere dall'assegnamento

x_2	false
x_4	false
x_5	true
x_7	true
x_9	false

- $T_\pi = \text{MAX}$

PROBLEMA DI DECISIONE ASSOCIATO

Ad ogni problema di ottimizz. Π potete associare un $\hat{\Pi}$ problema di decisione

1) $I_{\hat{\Pi}} = (x, k)$ $\quad x \in I_{\Pi}$, $k \in \mathbb{N}$

2) la risposta per l'input (x, k) è sì sse $\exists y \in Amm_{\Pi}(x)$ t.c.

$$\begin{cases} c_{\Pi}(x,y) \leq k & T_{\Pi} = MIN \\ c_{\Pi}(x,y) \geq k & T_{\Pi} = MAX \end{cases}$$

ESEMPIO $\widehat{MAXSAT}$

1) $I_{\widehat{MAXSAT}} = \{(\varphi, k) \mid$ φ è una formula CNF e $k \in \mathbb{N}\}$

2) (φ, k) è sì sse $\exists$ assegnamento che rende vere $\geq k$ clausole di φ

$PO = \{\Pi$ problemi di ottimizz. $\mid$ Π è risolvibile in tempo polinomiale$\}$

<u>Teorema</u>: Se $\Pi \in PO$, allora

$\hat{\Pi} \in P$

Corollario: se $\hat{\Pi}$ è NP_c

allora $\Pi \notin PO$ $(P \neq NP)$

RAPPORTO DI PRESTAZIONI

Dato p.o. Π, chiamiamo $opt_\Pi(x)$ il valore ottimo della f. obiettivo su input x.

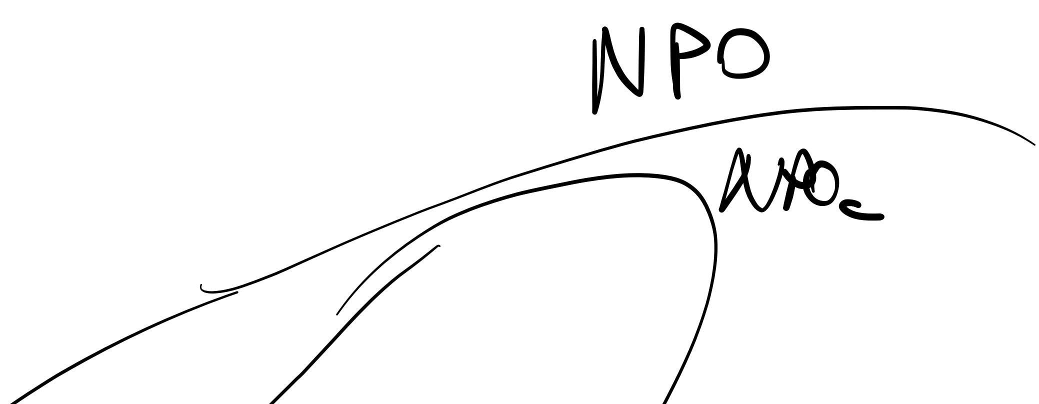
Dato un algoritmo approssimato per Π

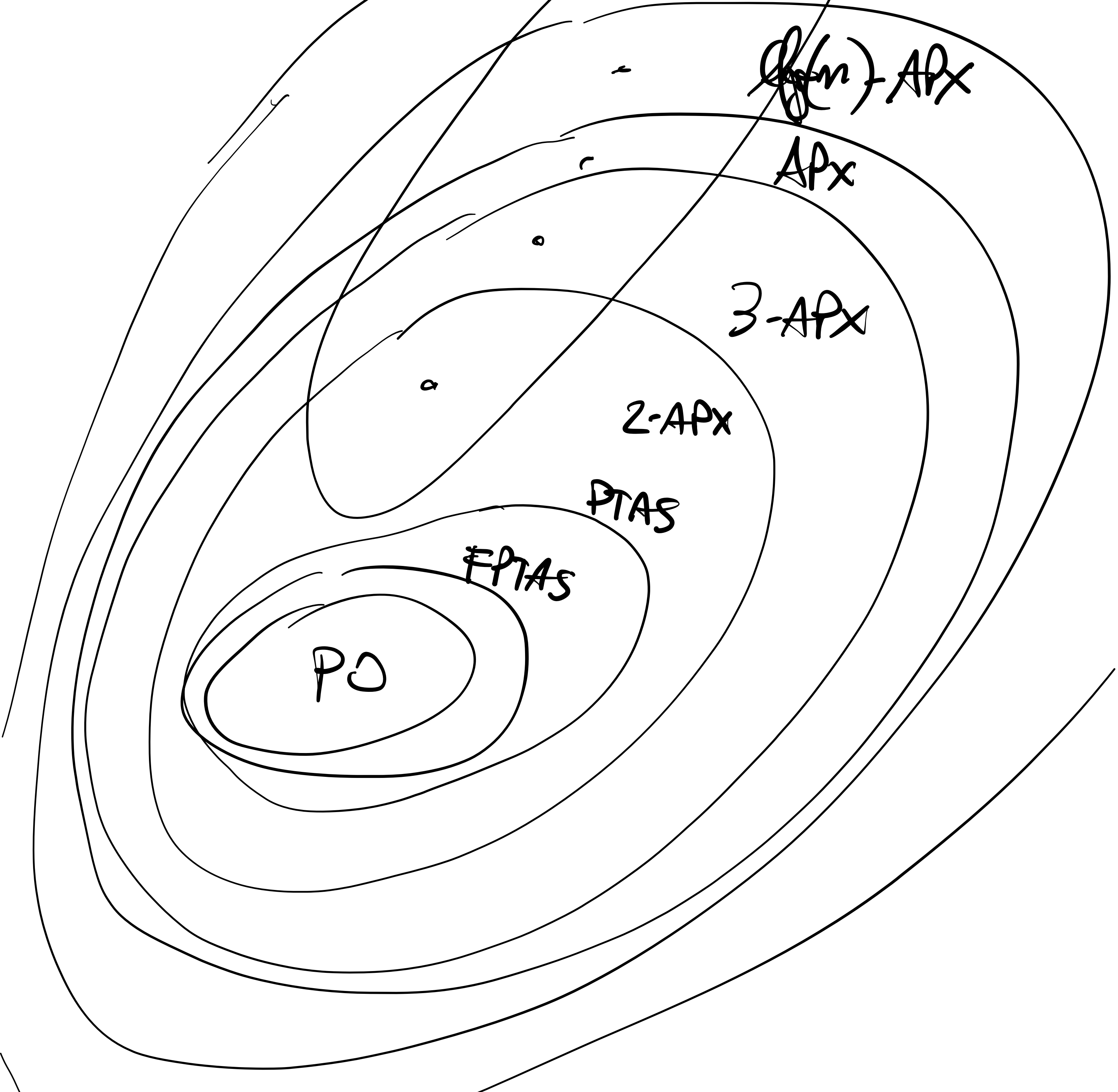
$$x \in I_\Pi \rightarrow \boxed{A} \rightarrow y \in Amm_\Pi(x)$$

$$R_\Pi(x) = \max\left\{ \frac{c_\Pi(x,y)}{opt_\Pi(x)}, \frac{opt_\Pi(x)}{c_\Pi(x,y)} \right\}$$

($Opt_{\pi}(x)$ $c_{\pi}(x, \cdot)$)

Si dice che A è una <u>α-approssimazione</u> per Π se $\forall x \in I_{\pi}$: $R_{\pi}(x) \leq \alpha$





$$APX = \bigcup_{\alpha \geq 1} \alpha\text{-}APX$$