$$L \in \underbrace{PCP[r(n),\ q]}_{V} = NP$$

$$z \in 2^*$$

$$\rightsquigarrow$$

$$R \in \underbrace{2^{r(|z|)}}$$

$$i_1^{z,R}, \dots, i_q^{z,R} \in \mathbb{N}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$b_1 \qquad b_q \in 2$$

$$\rightsquigarrow_{\ z,R,\ b_1 \dots, b_q}$$

SI / NO

$z = 10110110$ $\qquad r(|z|) = 2$ $\qquad q = 3$

$R = 01$

3, 15, 27

w_3	w_{15}	w_{27}	
0	0	0	SI
0	0	1	NO
0	1	0	NO
0	1	1	SI
1	0	0	NO
1	0	1	NO
1	1	0	NO

1 1 1 | SI

Ogni k-CNF (con $k \geq 3$) con t clausole può trasformarsi in una 3-CNF con $(k-2)t$ clausole preservando la soddisfacibilità

$$x_7 \vee \neg x_4 \vee x_9 \vee \neg x_{15}$$

$$(x_7 \vee \neg x_4 \vee y_1) \wedge (x_9 \vee \neg x_{15} \vee \neg y_1)$$

Teorema: Per ogni $k \geq 3$ esiste $\varepsilon > 0$ t.c. MAX E k SAT non è $(1+\varepsilon)$-appross. (a meno che $P = NP$)

Dim: (Per $k=3$)

Scegliamo un $L \in NP$-completo.

$L \in NP = PCP[r(n), q]$ per qualche $r(n) \in O(\log n)$, $q \in \mathbb{N}$.

Sia V il verificatore.

$$z \in 2^*$$

$$R \in 2^{r(|z|)}$$

$$x_1, \dots, x_q$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$b_1 \qquad\qquad b_q$$

Si può scrivere una q-CNF

$$\boxed{\psi_{z,R}}$$

soddisfacibile sse V accetta

che dipende dalle variabili logiche $w_0, w_1, w_2, \dots$

dove $w_i = \text{true}$ sse i-esimo carattere dell'oracolo è un 1.

w_3	w_{15}	w_{27}	
0	0	0	NO
0	0	1	SI
0	1	0	SI
0	1	1	NO
1	0	0	SI
1	0	1	SI
1	1	0	SI
1	1	1	NO

$$\Rightarrow (w_3 \lor w_{15} \lor w_{27}) \land (w_3 \lor \neg w_{15} \lor \neg w_{27}) \land (\neg w_3 \lor \neg w_{15} \lor \neg w_{27})$$

$\psi_{z,R}$ q-CNF con $\le 2^q$ clausole

$\Rightarrow \psi_{z,R}$ 3-CNF con $\le q 2^q$ clausole

$$\Phi_z = \bigwedge_{R\in 2^{r(|z|)}} \boxed{\varphi_{z,R}}$$

3-CNF con $\overset{=}{\le} q2^q 2^{r(|z|)}$ clausole

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2q2^q}}$$

$$\frac{w^*}{w} \le 1+\varepsilon$$

$$\Phi_z$$

$$\downarrow$$

Algoritmo di appross. per MaxE3SAT con tasso $\alpha < 1+\varepsilon$

$z\in L$: $\ge \dfrac{q2^q2^{r(z)}}{1+\varepsilon}$

$z\notin L$: $\le q2^q2^{r(z)} - \dfrac{2^{r(z)}}{2}$

Se $z\in L$, $\exists w$ che fa accettare V con probabilità 1

$\Rightarrow \Phi_z$ è soddisfacibile
$\rightarrow$ $q2^q2^{r(|z|)}$ clausole soddisfacibili

Se $z\notin L$, $\forall w$ V rifiuta con probabilità $\ge \frac{1}{2}$

⇒ Massimo numero di clausole soddisfacibili in Φ_z è

$$q2^q 2^{r(|z|)}$$

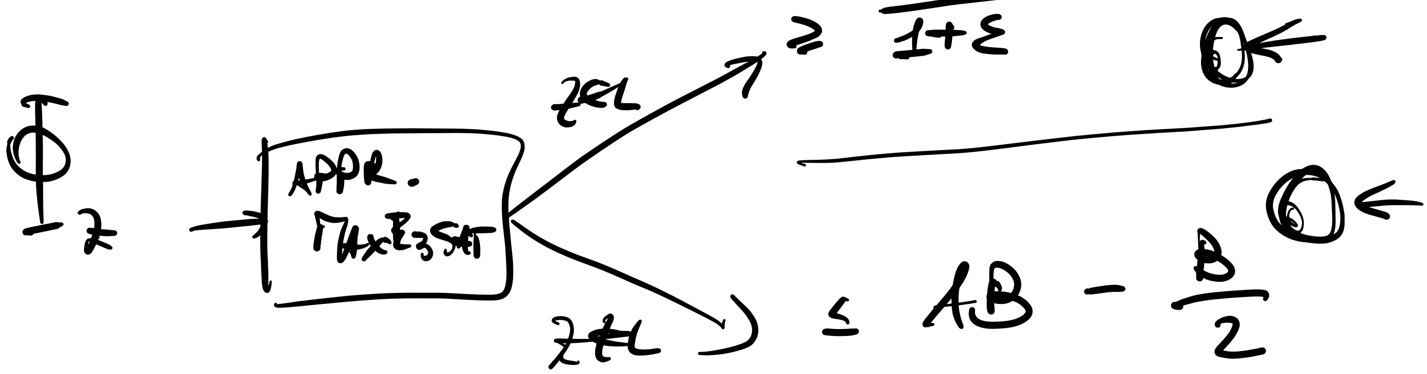
$$\le \frac{q2^q 2^{r(|z|)}}{2} + \frac{2^{r(|z|)}}{2}(q2^q - 1) =$$

$$= \underbrace{q2^q 2^{r(|z|)} - \frac{2^{r(|z|)}}{2}}$$

$A = q2^q$

$B = 2^{r(|z|)}$

$\varepsilon = \frac{1}{2A}$



$$AB - \frac{B}{2} > \frac{AB}{1+\varepsilon}$$ p.a.

$$AB + AB\varepsilon - \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\varepsilon - AB > 0$$

$$\varepsilon\left(AB-\frac{B}{2}\right)-\frac{B}{2}>0$$

$$\frac{1}{2A}\left(AB-\frac{B}{2}\right)-\frac{B}{2}>0$$

$$\frac{B}{2}-\frac{B}{4A}-\frac{B}{2}>0$$

$$-\frac{B}{4A}>0$$

IMPOSSIBILE

$\square$