PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE (TSP)

TSP

INPUT: $G=(V,E)$ grafo non orientato $\langle \delta_e \rangle_{e \in E}$

SOL. AMMISSIBILI: circuiti hamiltoniani (che passano per ogni vertice esattamente una volta)

FUNZ. OBIETTIVO: lunghezza del circuito

TIPO: MIN

TSP $\underset{\text{equivalente}}{=}$ TSP su cricche

D'ora in avanti assumiamo $G = K_n$

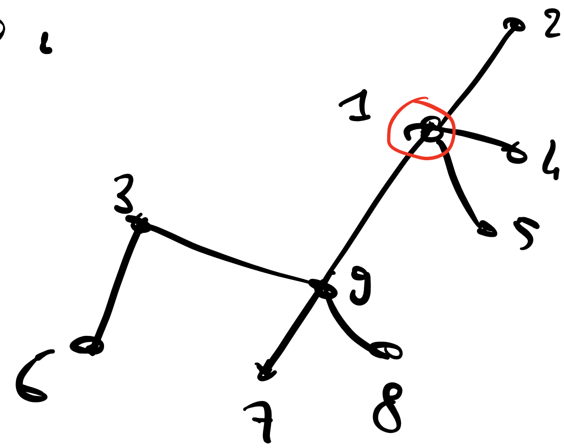
TSP METRICO

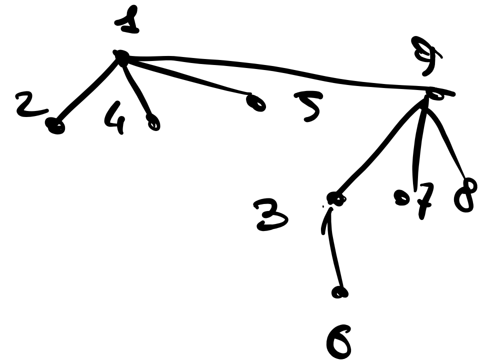
1) G è una cricca
2) $\forall x, y, z$
$$\delta_{xy} \leq \delta_{xz} + \delta_{zy}$$

DUE INGREDIENTI MANCANTI

1) MINIMUM SPANNING TREE ⇒ Algoritmo di Kruskal

Dato un grafo pesato, connesso trovare un albero di copertura (cioè che tocca tutti i vertici) di peso totale minimo.





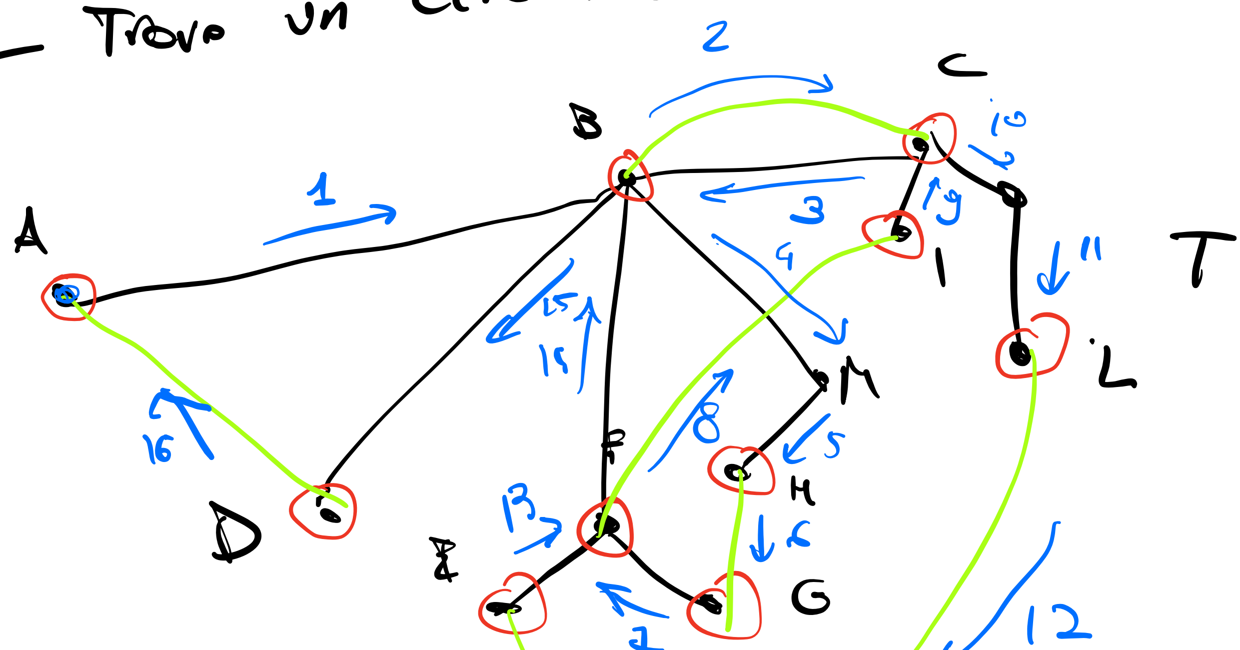
2) MINIMUM-WEIGHT PERFECT MATCHING

Dato una cricca pesata con un numero pari di vertici, trovare un matching perfetto di peso minimo.

→ Blossom Algorithm

ALGORITMO DI CHRISTOFIDES PER IL TSP METRICO

- INPUT $G=(V,E)$ che è una cricca con pesi $<\delta_e>$ che sono una metrica
- Troviamo un Minimum Spanning Tree T
- Sia D l'insieme dei vertici di grado dispari in T
- Per handshaking lemma, $|D|$ è pari
- Scegliamo un Minimum Weight Perfect Match su D
- Sia $H = T \cup M$: tutti i vertici di H hanno grado pari
- Trovo un circuito euleriano π

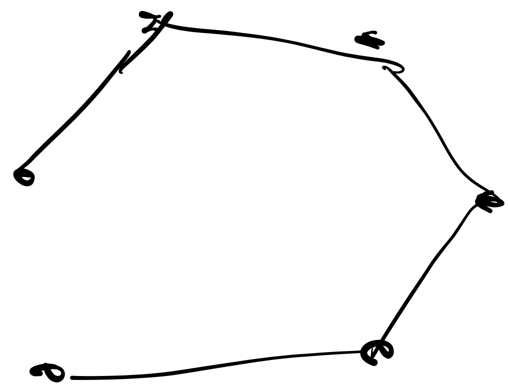


- Trasformo π in un circuito hamiltoniano $\tilde{\pi}$

- Output $\tilde{\pi}$

Lemma 1: $\delta(T) \le \delta^*$

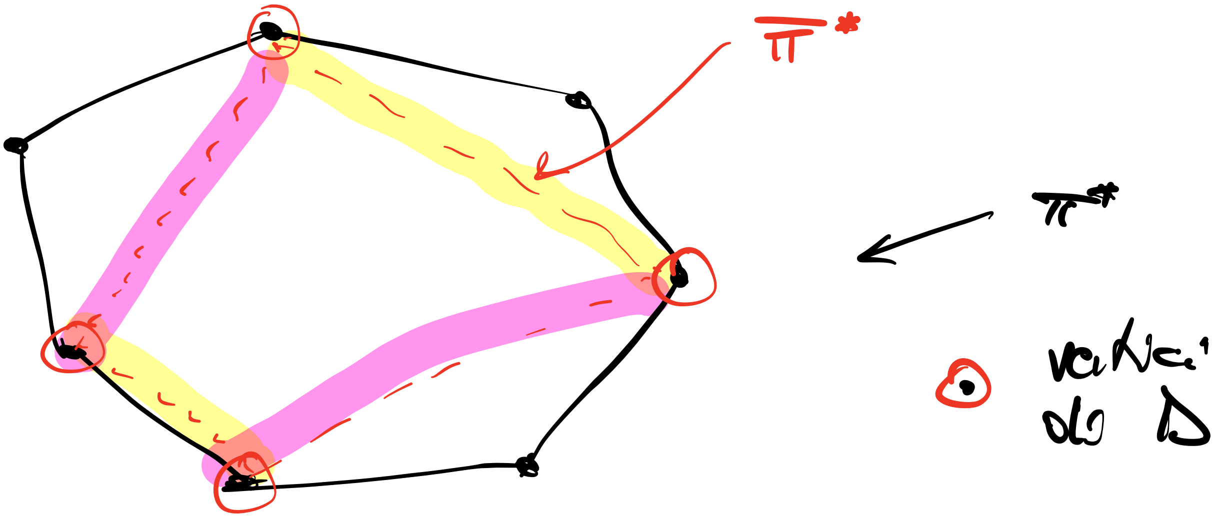
Dim: Sia π^* un TSP ottimo. Se da π^* togliamo un lato e otteniamo un albero un albero di copertura.



$$\delta(T) \le \delta^* - \delta_e \le \delta^* \qquad \square$$

Lemma 2: $\delta(M) \le \frac{1}{2}\delta^*$

Dim: Sia π^* il TSP ottimo



$$\delta(\overline{\pi}^*) \leq \delta(\pi^*)$$

Dividiamo i lati di $\overline{\pi}^*$ in due insiemi M_1 e M_2 alternandoli

$\Rightarrow$ M_1 e M_2 sono perfect matching su D

$$\delta(M) \leq \delta(M_1)$$
$$\delta(M) \leq \delta(M_2)$$

$$2\delta(M) \leq \delta(M_1)+\delta(M_2) = \delta(\overline{\pi}^*)$$
$$\leq \delta(\pi^*)$$

$$\Rightarrow \delta(M) \leq \frac{1}{2}\delta^*$$

$\square$

Teorema: L'algoritmo di Christofides fornisce una $\frac{3}{2}$-approssimazione per il TSP metrico.

Dim: $\delta(\pi) = \delta(T) + \delta(M) \overset{\text{Lemmi 1 e 2}}{\leq} \delta^* + \frac{1}{2}\delta^* =$

$$= \frac{3}{2}\delta^*$$

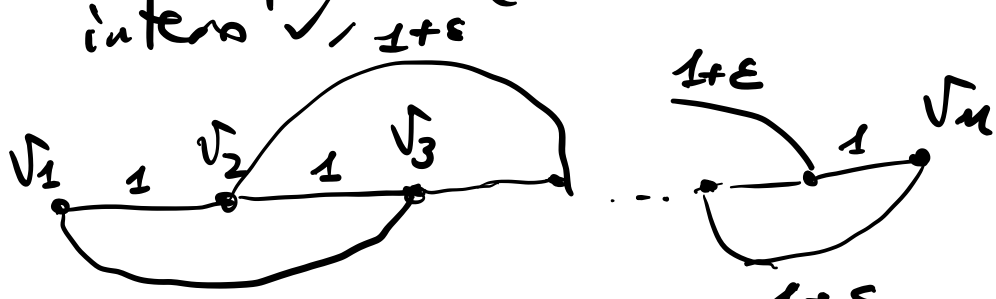
Per la triangolare

$$\delta(\tilde{\pi}) \leq \delta(\pi) \leq \frac{3}{2}\delta^*. \square$$

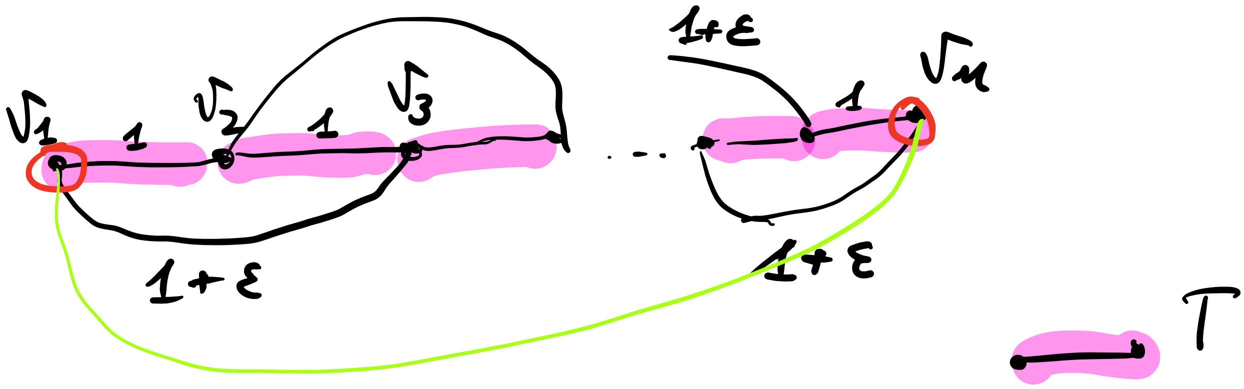
Teorema: L'analisi è stretta.

Dim: n intero pari, $1 > \varepsilon > 0$

$G_{n,\varepsilon}$



Sia $K_{n,\varepsilon}$ la clique ottenuta aggiungendo tutti i lati mancanti con lunghezza d = shortest path.

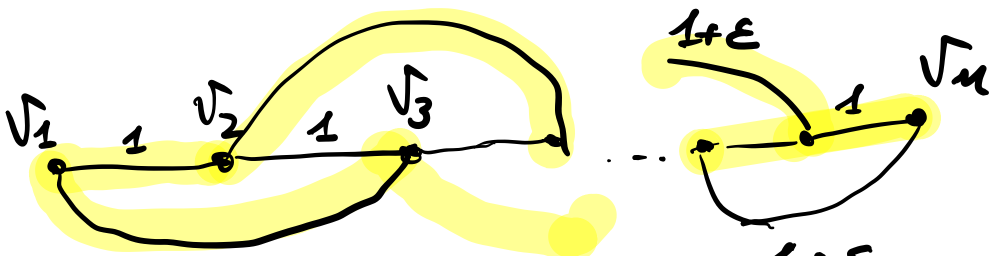


$$\delta(T) = n - 1$$

$$\delta(M) = \underbrace{(1+\varepsilon)\frac{n}{2}} + 1$$

$$\delta = \delta(T) + \delta(M) = n - 1 + (1+\varepsilon)\frac{n}{2} + 1 =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}n + \varepsilon\frac{n}{2}}$$



$$\delta^* = (1+\varepsilon)n + 2$$

$$\frac{\delta}{\delta^*} = \frac{\frac{3}{2} n + \varepsilon \frac{n}{2}}{(1+\varepsilon) n + 2} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

$n \to \infty$

$\varepsilon \to 0$