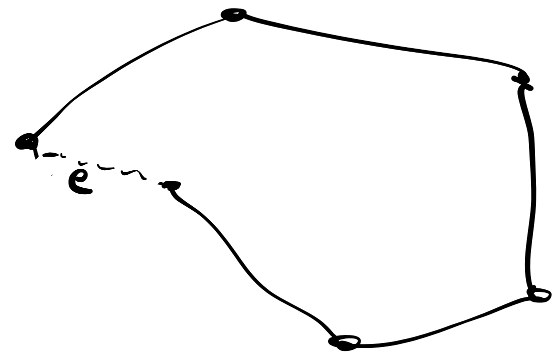
Lemma 1: $\delta(T) \le \delta^*$

Dim: Sia π^* un TSP ottimo



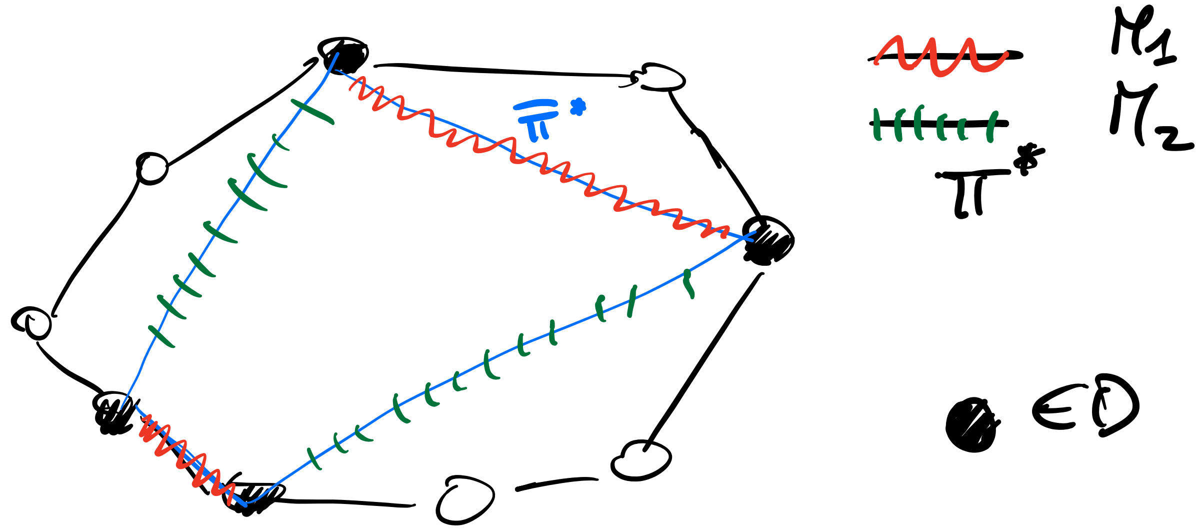
$T \quad \forall e \in \pi^*$

spanning tree

$$\delta^* \ge \underbrace{\delta^* - \delta_e} \ge \delta(T). \quad \square$$

Lemma 2: $\delta(M) \le \frac{1}{2}\delta^*$

Dim: Prendiamo π^* (TSP ottimo) e cortocircuitiamolo sui vertici di D.



$$\delta(\overline{\pi}^*) \le \delta(\pi^*)$$

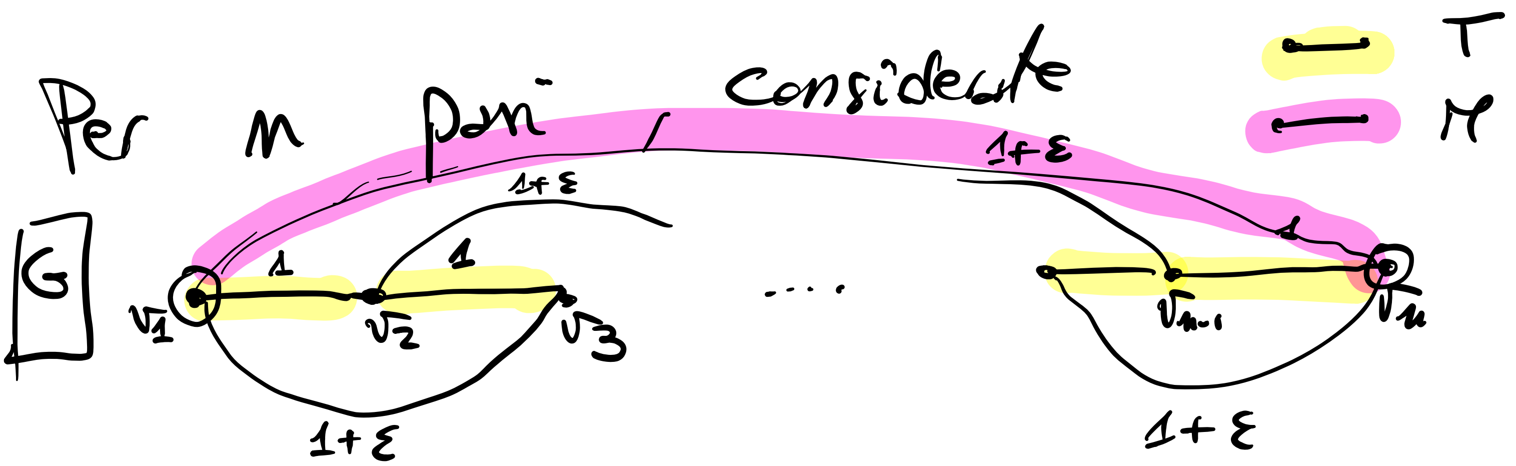
$$\delta^* \ge \delta(\overline{\pi}^*) = \delta(M_1) + \delta(M_2) \ge$$
$$\ge \delta(M) + \delta(M) = 2\delta(M)$$
$$\Rightarrow \quad \delta(M) \le \frac{1}{2}\delta^*. \qquad \square$$

__Teorema__: L'algoritmo di Christofides è una $\frac{3}{2}$-approssimazione per il TSP metrico

$T \cup M$

__Dim__: $\delta(\pi) \le \delta(\pi_{EULER}) = \delta(T) + \delta(M) \le$
$$\underset{\text{Lemma 1 e 2}}{\le} \delta^* + \frac{1}{2}\delta^* = \frac{3}{2}\delta^*. \qquad \square$$

Per n pari considerate



Completate G a una clique
lati extra costano come

il cammino minimo. $0 < \varepsilon < 1$

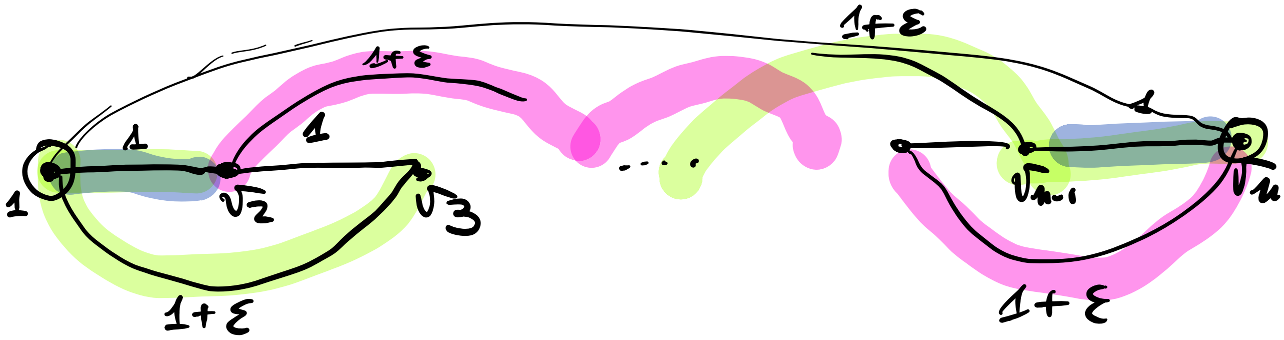
Christofides.

H ha peso $= (1+\varepsilon)\frac{n}{2} + 1$

$$\delta = (1+\varepsilon)\frac{n}{2} + 1 + (n-1) =$$

$$= \frac{n}{2} + \varepsilon\frac{n}{2} + 1 + n - 1 =$$

$$= \frac{3}{2}n + \varepsilon\frac{n}{2}$$



$$\delta^* = (1+\varepsilon)\frac{n}{2} + (1+\varepsilon)\frac{n}{2} + 2 =$$

$$= (1+\varepsilon)n + 2$$

$$\frac{\delta}{\delta^*} = \frac{\frac{3}{2}n + \varepsilon\frac{n}{2}}{(1+\varepsilon)n + 2} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

$n \to \infty$

$\varepsilon \to 0$

INAPPROSSIMABILITÀ DI TSP

<u>Teorema</u>: Non esiste nessun $\alpha > 1$ t.c. TSP sia α-approssimabile (nemmeno sulle clique).

<u>Dim</u>:

$\boxed{\text{Determinare se un grafo ha un circuito hamiltoniano è NP-completo}}$

Supponiamo p.a. che esista un algoritmo A che α-approssima TSP sulle clique (per qualche $\alpha > 1$).

Dato un grafo G con n nodi costruiamo

$$\bar{G} = \left(V, \binom{V}{2}\right)$$

$$\bar{\delta}_{\{x,y\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x,y\} \in E \\ \lceil \alpha n \rceil + 1 & \text{altrim.} \end{cases}$$

$$\bar{G}, \bar{\delta} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow$$ circuito hamiltoniano π di costo $\bar{\delta}$

G

1. ha un circuito hamiltoniano

$$\bar{\delta}^* = n$$

2. non ha un circuito hamiltoniano

$$\bar{\delta}^* \geq \lceil \alpha n \rceil + 1$$

$$\underset{\lceil \alpha n \rceil + 1}{\overset{2}{\leq}} \bar{\delta} \leq \alpha \bar{\delta}^* \overset{1}{\leq} \alpha n$$

$\bar{\delta} \leq \alpha n$ $\quad$ G ha un circ. hamiltoniano

$\bar{\delta} \geq \lceil \alpha n \rceil + 1$ $\quad$ G non ha circ. hamiltoniani

$\square$

UN PTAS PER 2-LOAD BALANCING

2-LOAD BALANCING = LOAD BALANCING con $m=2$

<u>INPUT</u>: $t_0, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{N}^+$
$\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ $(\varepsilon > 0)$

if $\varepsilon \geq 1$
Assegna tutti i task a una macchina
Stop

- Ordiniamo i t_i in ordine non crescente
$t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_{n-1}$

FASE 1
- Sia $k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$
- Assegnamo in modo ottimo

i task $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$

FASE 2
- I restanti task $t_k, t_{k+1}, \dots, t_{n-1}$ sono assegnati in modo greedy

Teorema: L'algoritmo è una $(1+\varepsilon)$-approssimazione per 2-LOAD BALANCING.

Dim:

$$T = \sum_{i \in n} t_i$$

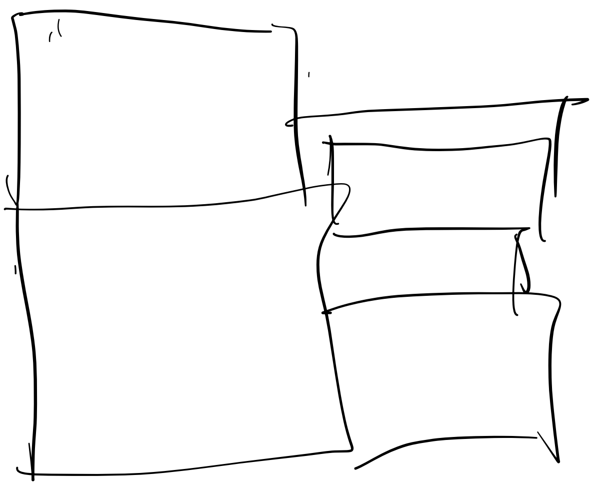
$$L^* \geq \frac{T}{2}$$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\varepsilon \geq 1$

$$L = T$$

$$\frac{L}{L^*} \leq \frac{T}{T/2} = 2 \leq 1+\varepsilon$$

CASO 2 $0 < \varepsilon < 1$

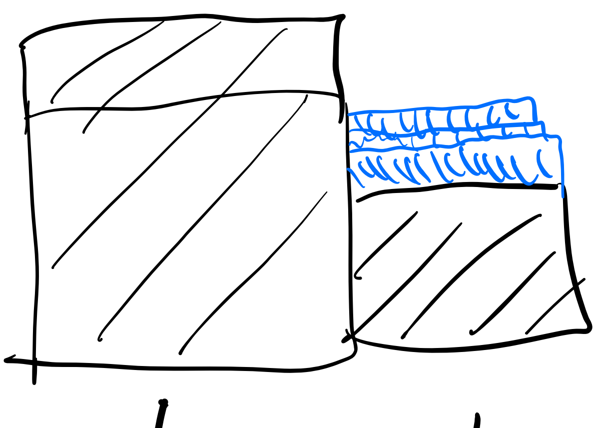


S.p.g. $L_1 \geq L_2$

SOTTOCASO 2A

Alla macchina 1 non ho più assegnato task nella fase 2.

SAV



$L_1 \qquad L_2$

$\Rightarrow$ OTTIMA

$\boxed{\text{SOTTOCASO } 2\cancel{B}}$

Sono stati assegnati task durante la fase 2 anche alla prima macchina.

$$\underbrace{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}}_{\text{FASE 1}}, \underbrace{t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n}_{\text{FASE 2}}$$

t_h

t_h sia l'ultimo task assegnato a 1.

$$L_1 - t_h \leq L_2' \leq L_2$$

$$2L_1 - t_n \le L_1 + L_2 = T$$

$$(*)\quad \boxed{L = L_1 \le \frac{t_n}{2} + \frac{T}{2}}$$

$$(***)\quad T = \sum_{i \in m} t_i = \overbrace{t_0 + t_1 + \dots + t_{k-1} + t_k + \underset{\geq t_n}{\dots} + t_{n-1}} \geq$$

$$\geq t_n(k+1)$$

$$\frac{L}{L^*} \underset{(**)}{\le} \frac{L}{T/2} \underset{(*)}{\le} \frac{\frac{t_n}{2} + \frac{T}{2}}{T/2} =$$

$$= 1 + \frac{t_n}{T} \underset{(***)}{\le} 1 + \frac{t_n}{t_n(k+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{k+1} \leq \qquad k \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1 + 1} =$$

$$= 1 + \varepsilon \qquad \square$$

SAV

$$L_1 - L_2^{PF} \leq \sum_{i=k}^{n-1} t_i$$

$$\vee$$

$$L_1^{*} \quad L_2^{*}$$