PROBLEMA DELLO ZAINO (KNAPSACK)

INPUT:

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{N}^+$

$w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{N}^+ \quad (w_i \leq W)$

$W \in \mathbb{N}^+$

SOL. AMMISS. : $I \subseteq n$

t.c. $\sum_{i \in I} w_i \leq W$

FUNZ. OBIETTIVO:

$v = \sum_{i \in I} v_i$

TIPO: MAX

UNA SOLUZIONE ESATTA BASATA SULLA PROGR. DINAMICA

PSEUDOPOL.

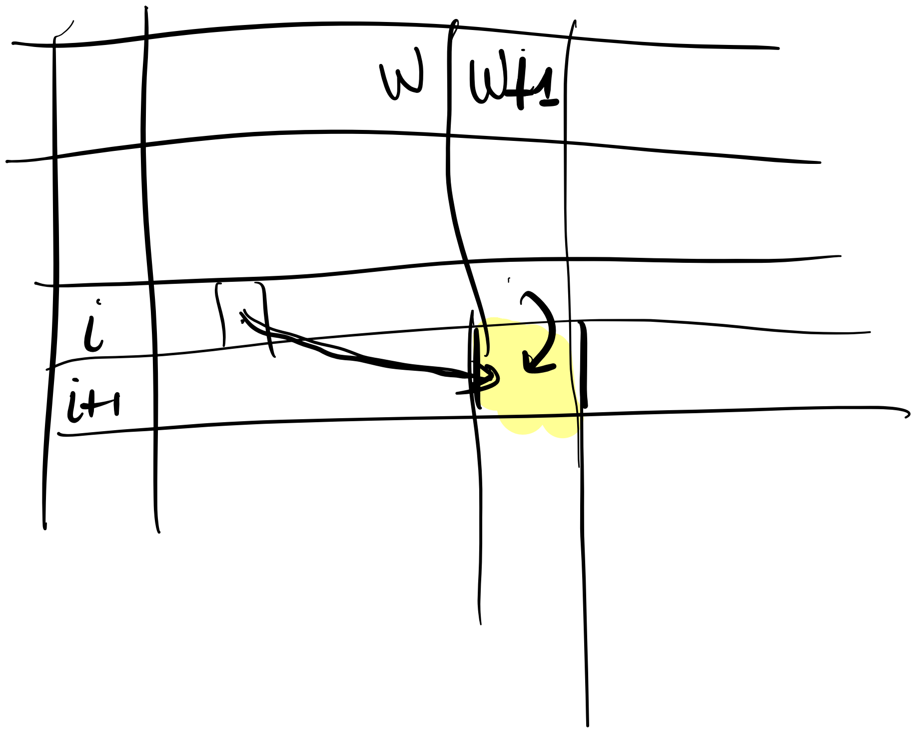
$O(n W)$

i\w	0	1	2	3	...	W
0	0	0	0	0		0
1	0					
⋮		v[i,w]				
n	0					

MASSIMO VALORE CHE RIESCO A PORTARE A CASA

i = considero solo i primi i oggetti

W = capacità dello zaino



$$v[i+1, w+1] = \begin{cases} v[i, w+1] & \text{se } w_i > w+1 \\ \max\left(v[i, w+1],\ v_i + v[i, w+1-w_i]\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall i \in n \quad v[i, 0] = 0$

$\forall w \in W \quad v[0, w] = 0$

for(i = 0; i < n; i++)

for(w = 0; w < W-1; w++)

```
for (w=0; w<W; w++)
  if w[i] <= w+1 {
      v[i+1, w+1] = max(
          v[i, w+1],
          v[i] + v[i, w+1-w[i]]
      )
  } else {
      v[i+1, w+1] = v[i, w+1]
  }
}
```

UN'ALTRA PARAMETRIZZAZIONE POSSIBILE

$V = \max_i v_i$

$i \backslash v$	0	1	2	...	v		nV
0	0	∞	∞				∞
1	0						
2	0		$w[i,v]$				
$\vdots$							
n	0				$\leq W$	$> W$	$> W$

MINIMO PESO CHE DEVO SOPPORTARE

i = considero solo i primi i oggetti

v = voglio portare a casa un valore $\geq v$

$$W[i+1, v+1] = \begin{cases} \min\left(W[i, v+1],\; \underbrace{w_i + W[i, \underset{\sim}{v+1-v_i}]}\right) & \text{se } v_i \le v+1 \\ \min\left(W[i, v+1],\; \underset{\sim}{w_i}\right) & \text{altr.} \end{cases}$$

SCALING PER COLONNA

- $X = (v_i, w_i, W)$ istanza di Knapsack $v_i, w_i, W \in \mathbb{N}^+$

$\varepsilon \in (0, 1]$ produciamo una $1+\varepsilon$ approssimazioni

$$\vartheta := \frac{\varepsilon \boxed{V}}{2n}$$

$\max_{i \in n} v_i$

- $\bar{X} = (\bar{v}_i, w_i, W)$

$$\bar{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\theta} \right\rceil \theta$$

- $\hat{X} = (\hat{v}_i, w_i, W)$

$$\hat{v}_i = \left\lceil \frac{v_i}{\theta} \right\rceil$$

risolvibile con progr. din.

$I^*, \bar{I}^*, \hat{I}^*$ sol. ottime

$v^*, \bar{v}^*, \hat{v}^*$ val. ottimo

Osservazione:

$\bar{I}^* = \hat{I}^*$

$I = I$

$\overline{v}^* = \vartheta \, \hat{v}^*$

Teorema: Sia I una soluzione ammissibile di X.

$$(1+\varepsilon)\sum_{i\in \hat{I}^*} v_i \geq \sum_{i\in I} v_i$$

Dim:

ARROT. PER ECCESSO

$$\sum_{i\in I} v_i \leq \sum_{i\in I} \left\lceil \frac{v_i}{\vartheta} \right\rceil \vartheta =$$

$$= \sum_{i\in I} \overline{v}_i < \sum_{i\in \overline{I}^*} \overline{v}_i =$$

$\overline{I}^* = \hat{I}^*$

$$= \sum_{i\in \hat{I}^*} \overline{v}_i \leq \sum_{i\in \hat{I}^*} (v_i + \vartheta) =$$

$$= \sum_{i\in \hat{I}^*} v_i + n\vartheta =$$

εV

$$= \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i + \cancel{n} \frac{\varepsilon V}{2 \cancel{n}} =$$

$$= \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i + \frac{\varepsilon V}{2}$$

(*) $$\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i + \frac{\varepsilon V}{2}$$

In particolare questo è vero per $I = \{i_{max}\}$ dove i_{max} è l'indice per cui $v_{i_{max}} = V$.

$\varepsilon \leq 1$

$$V \leq \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i + \frac{\varepsilon V}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i + \frac{V}{2}$$

(**) $$\frac{V}{2} \leq \sum_{i \in \hat{I}^*} v_i$$

Seguendo da (*)

$$\sum_{i\in I} v_i \le \sum_{i\in \hat{I}^*} v_i + \varepsilon \sum_{i\in \hat{I}^*} v_i =$$

$$= (1+\varepsilon)\sum_{i\in \hat{I}^*} v_i .$$

$\square$

Teorema: $$(1+\varepsilon)\overbrace{\boxed{\sum_{i\in \hat{I}^*} v_i}}^{\text{OTTIMO OTTENUTO DALL'ALG.}} \ge v^*$$

Dim:

$$(1+\varepsilon)\sum_{i\in \hat{I}^*} v_i \ge \sum_{i\in I^*} v_i = v^*$$

$\square$

$$\frac{v^*}{\sum_{i\in \hat{I}^*} v_i} \le 1+\varepsilon$$

$$\hat{V} = \left\lceil \frac{V}{\vartheta} \right\rceil = \left\lceil \frac{\cancel{V}\, 2n}{\varepsilon \cancel{V}} \right\rceil =$$

$$= \left\lceil \frac{2n}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{2n}{\varepsilon} + 1$$

colonne della progr. din

è $\quad n\hat{V} = O\left(\frac{2n^2}{\varepsilon}\right)$

$\Rightarrow$ RIEMPIRE LA TAB.

DI $\hat{X}$ $\quad O\left(\frac{2n^3}{\varepsilon}\right)$

Corollario : KNAPSACK $\in$ FPTAS

$\square$