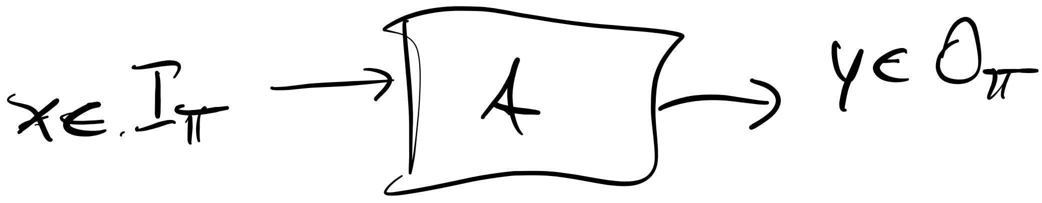
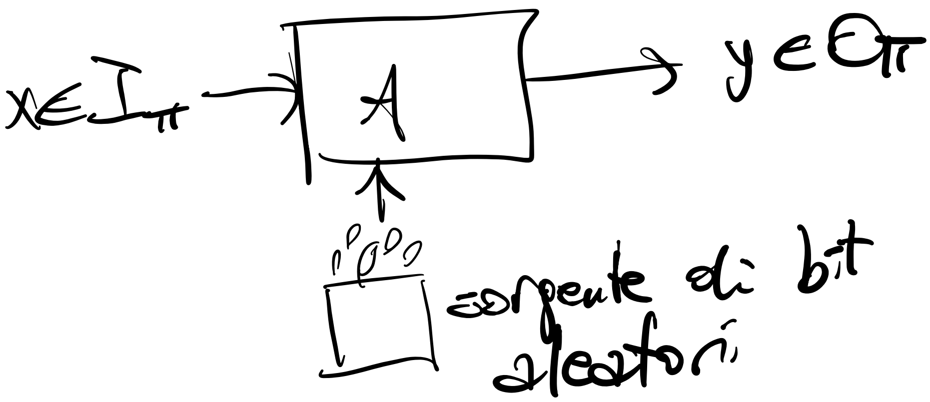


$P_A(y \mid x)$



ALGORITMO DI KARGER PER IL TAGLIO MINIMO

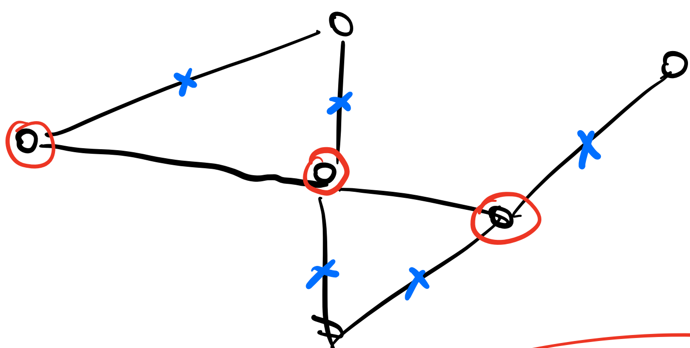
INPUT: $G=(V,E)$ non orientato

SOL. AMMISSIBILE: $S \subseteq V$

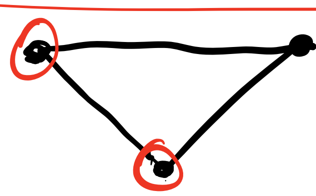
$\emptyset \neq S \neq V$

FUNZ. OBIETTIVO: $|\underbrace{\{e \in E \mid e \cap S \neq \emptyset \ \ e \cap S^c \neq \emptyset\}}_{E_S}|$

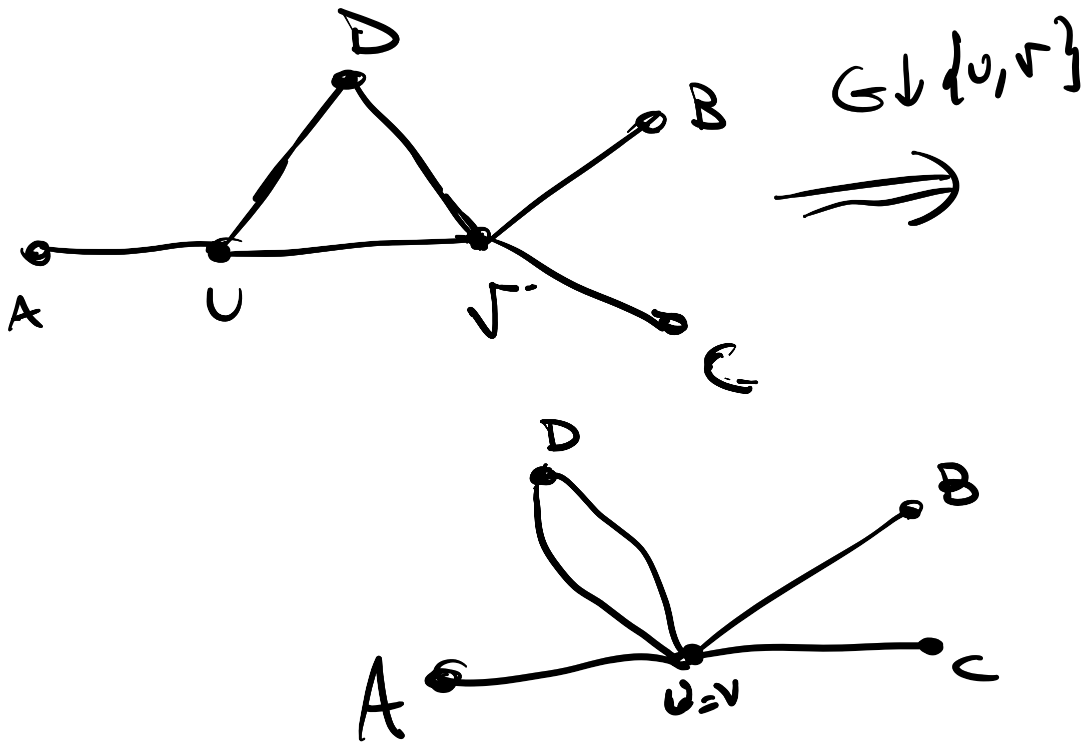
TIPO: MIN



Taglio minimo ha dimensione $\leq$ grado minimo



CONTRAZIONE DI UN LATO



ALGORITMO DI KARGER

- Se G non è connesso, emetti una qualunque componente
- Altrimenti

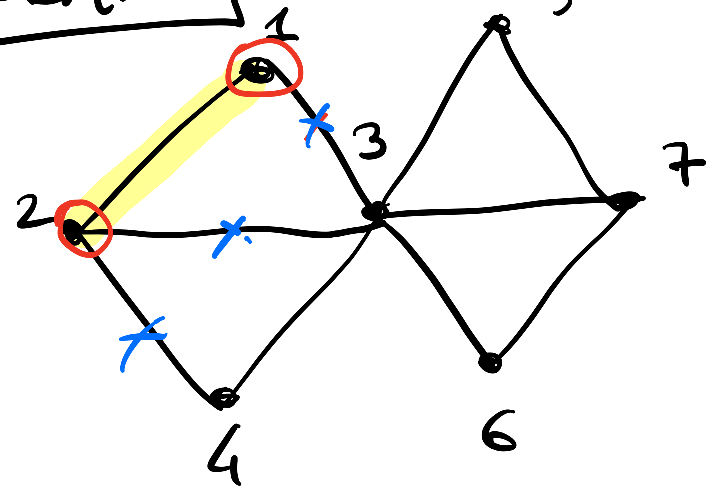
  while $|V| > 2$

  $e \leftarrow$ un lato a caso

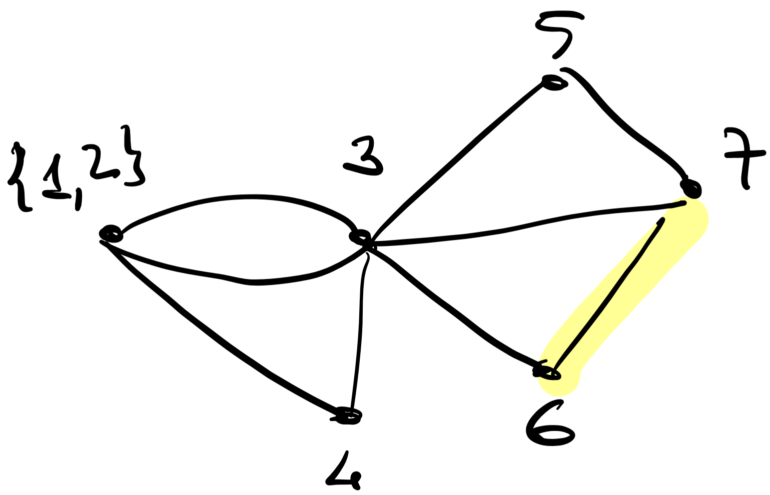
  $G \leftarrow G \downarrow e$

- Output la classe di equivalenza di una delle due estremità

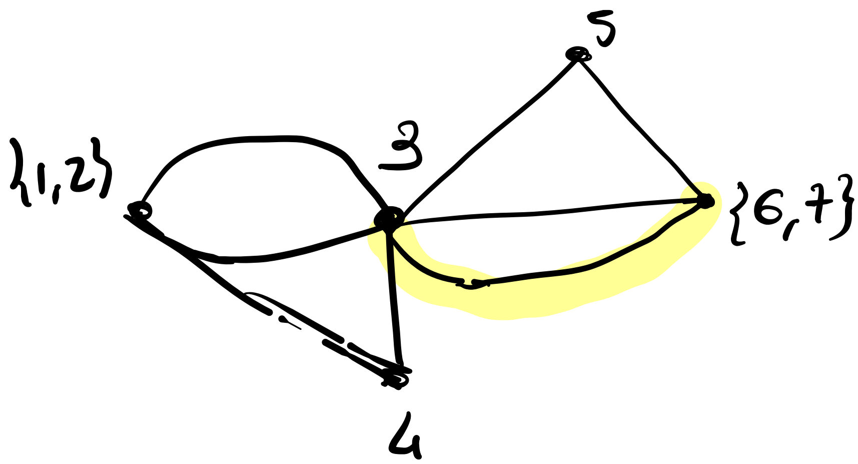
ESEMPIO



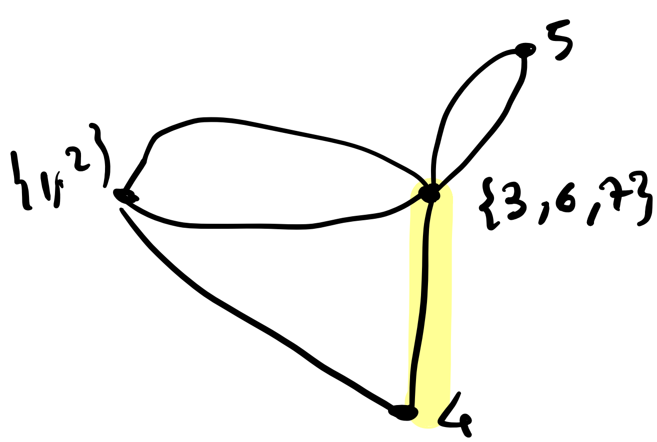
$G_1 = G$

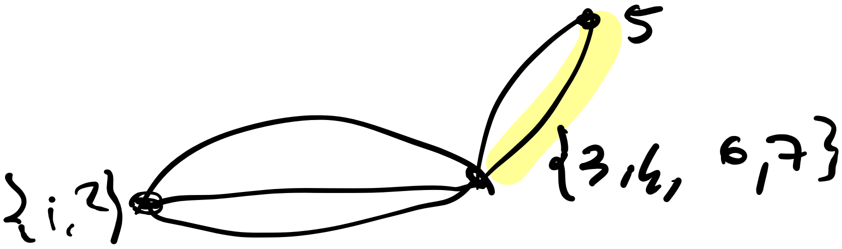


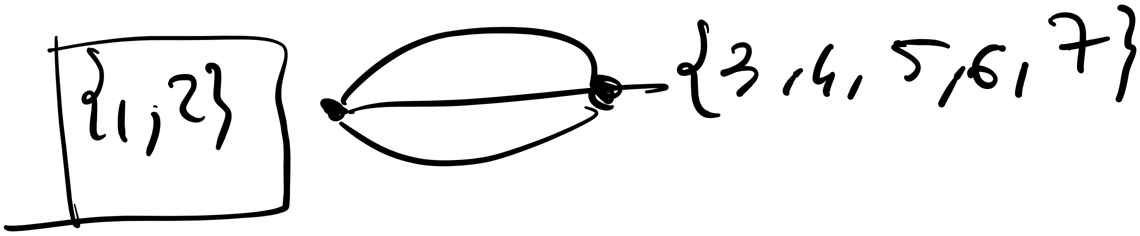
G_2



G_3







<u>Osservazioni</u> : S^* taglio minimo

k^* dimensione del taglio S^*

$\left(k^* = |E_{S^*}| \right.$ dove $\left. E_{S^*} = \{ e \mid e \cap S^* \neq \emptyset,\ e \cap \bar{S}^* \neq \emptyset \} \right)$

$G = G_1, G_2, G_3, \dots$

G_i il grafo prima i-esima contraz.

1) $n_{G_i} = n - i + 1$

2) Ogni taglio di G_i corrisponde ad un taglio di G della stessa dimensione

$\Rightarrow$ grado minimo di $G_i \geq k^*$

3) $$\sum_{v \in V_{G_i}} d_{G_i}(v) \geq k^*(n-i+1)$$

$$\| $$

$$2 m_{G_i}$$

$$m_{G_i} \geq \frac{k^*(n-i+1)}{2}$$

Sia $\mathcal{E}_i$ l'evento "all'i-esima contrazione non si è contratto un lato di E_{S^*}"

Lemma: $P[\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}]$

$$\geq \frac{n-i-1}{n-i+1}$$

Dim.

$$P[\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}]$$

$$= 1 - P[\neg \mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{i-1}] =$$

$$= 1 - \frac{k^*}{m_{G_i}} \overset{\text{oss. (3)}}{\geq}$$

$$\geq 1 - \frac{\cancel{k^*}\, 2}{\cancel{k^*}(n-i+1)} =$$

$$= \frac{n-i+1-2}{n-i+1} =$$

$$= \frac{n-i-1}{n-i+1} \qquad \square$$

Teorema: L'algoritmo di Karger trova il taglio minimo con probabilità $\geq \frac{1}{\binom{n}{2}}$

Dim: $P[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{n-2}] =$

$= P[\mathcal{E}_1] \cdot P[\mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_1] \, P[\mathcal{E}_3 | \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] \ldots \geq$

Lemma $\rightarrow$ $\geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{1}{3} =$

$\prod^{n-2}$

$$= \frac{\prod_{i=1} i}{\prod_{i=3}^{n} i} = \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}} . \quad \square$$

<u>Corollario</u>: Eseguendo Karger $\binom{n}{2} \ln n$ volte, ottieniamo il taglio minimo con probabilità $\geq 1 - \frac{1}{n}$

<u>Dim</u>: Ogni volta la probabilità di <u>NON</u> trovare l'ottimo

$$\leq 1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

Quindi

$$\leq \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}\right)^{\binom{n}{2} \ln n} \leq$$

$$\boxed{\forall x \geq 1 \quad \frac{1}{4} \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} \leq \frac{1}{e}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} \leq \frac{1}{n} \quad \square$$

RICORDIAMO CHE...

- $$P[\mathcal{E}_1 \cap \dots \cap \mathcal{E}_n] = $$
$$= P[\mathcal{E}_1]\, P[\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1]\, P[\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] \dots$$

(CHAIN RULE)

- $$P\left[\bigcup_i \mathcal{E}_i\right] \leq \sum_i P[\mathcal{E}_i]$$

(UNION BOUND)

- Per ogni variabile aleatoria non negativa e con media finita e per ogni $\alpha > 0$

$$P[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

(DISUGUAGLIANZA DI MARKOV)