

UN ALGORITHM PER SET COVER BASATO SUL PROBABILISTIC ROUNDING

INPUT: $S_1, S_2, \dots, S_m$ $\bigcup_{i=1}^m S_i = \Omega$
 $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{Q}^+$
 SOL. AMM.: $I \subseteq \{1, \dots, m\}$
 +.c. $\bigcup_{i \in I} S_i = \Omega$
 FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in I} w_i$
 TIPO: MIN

$x_1, x_2, \dots, x_j$

P

$$\begin{cases} \min & x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m \\ \left\{ \begin{array}{l} x_j \geq 0 \\ x_j \leq 1 \end{array} \right. & j = 1, \dots, m \\ \sum_{p \in S_i} x_i \geq 1 & \forall p \in \Omega \end{cases}$$

ALGORITHMO

$k \in \mathbb{N}^+$

- Risolvi P come LP
- Sia $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n \in [0, 1]$
- $I \leftarrow \emptyset$
- for $i = 1, \dots, m$
 - for $t = 1, \dots, \lceil k + \ln n \rceil$
con probabilità $\hat{x}_i$
inserisci i in I
- OUTPUT I

Teorema 1: L'algoritmo produce una soluzione ammissibile con probabilità $\geq 1 - e^{-k}$

Def: $\hat{v} = \sum_{i=1}^m w_i \hat{x}_i.$

Sia v^* la soluzione ottima originale.

$$\hat{v} \leq v^*.$$

$P[\text{sol. ammissibile}]$

$$= 1 - P[\text{almeno un punto lasciato non coperto}]$$

$\Sigma_p = p$ non è coperto nella soluzione

$$= 1 - P\left[\bigcup_{p \in D} \Sigma_p\right] \geq \text{Union Bound}$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in \Omega} P[\underline{\varepsilon}_p] =$$

$$= 1 - \sum_{p \in \Omega} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} P[i \notin I] =$$

$$= 1 - \sum_{p \in \Omega} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} (1 - \hat{x}_i)^{k + \ln n} \geq$$

$$\boxed{1 - x \leq e^{-x}}$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in \Omega} \prod_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} e^{-\hat{x}_i \cdot (k + \ln n)}$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in \Omega} e^{-(k + \ln n) \sum_{\substack{i \text{ t.c.} \\ p \in S_i}} \hat{x}_i} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{p \in \Omega} e^{-(k + \ln n)} =$$

$$= 1 - \sum_{p \in \Omega} \frac{1}{n} e^{-k} =$$

$$= 1 - e^{-k} \quad \square$$

Teorema 2: Per ogni $\frac{1}{\alpha} \in (0, 1]$

$P[\text{fattore di appross.} \geq \alpha(k + \ln n)] \leq \frac{1}{\alpha}$

Dim: La probabilità che $i \in I$

$e \leq (k + \ln n) \hat{x}_i$

$F_{t,i}$ = "l'elemento i è
inserito in I alla
 t -esima iterazione"

$$P\left[\bigcup_{t=1}^{k+\ln n} F_{t,i}\right] \leq \sum_{t=1}^{k+\ln n} P[F_{t,i}] =$$

↑
union

$$= (k + \ln n)^{\text{bound}} \hat{x}_i$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\underbrace{v}_{\text{OUTPUT}}] &= \sum_i w_i P[i \in I] \leq \\
 &\leq \sum_i w_i \hat{x}_i (k + \ln n) = \\
 &= (k + \ln n) \underbrace{\sum_i w_i \hat{x}_i}_{\hat{v}} = \\
 &= (k + \ln n) \hat{v} \leq \\
 &\leq \underbrace{v^*}_{\text{OTTIMO PROBL. ORIGINALE}} (k + \ln n)
 \end{aligned}$$

F. OBIETTIVO PROBL. RILASCIATO

$$(*) \quad \frac{\mathbb{E}[v]}{v^*} \leq k + \ln n$$

DISUG. DI MARKOV

$$P[X \geq B] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{B}$$

$$v(k + \ln n)$$

$$B = \alpha n$$

$$X = \frac{v}{v^*}$$

$$E\left[\frac{v}{v^*}\right] \leq k + \ln n$$

$$P\left[\frac{v}{v^*} \geq \alpha(k + \ln n)\right] \leq \frac{E\left[\frac{v}{v^*}\right]}{\alpha(k + \ln n)} \leq \frac{k + \ln n}{\alpha(k + \ln n)} = \frac{1}{\alpha} \quad \square$$

Corollario: Eseguendo l'alg. con $k=3$ c'è il $\geq 45\%$ di prob. di offrire una sol. ammissibile con un rapp. di app. di al massimo $6 + 2 \ln n$

Dim.: $\Sigma_{\text{non-ammiss}} = \text{"l'80 per cento"}$
 ha prodotto una sol. non ammissibile
 "la soluzione"

$$\sum_{\text{non-ott}} = \text{prodotta} \quad \text{da} \quad \text{un} \quad \text{tasso} > \sigma + 2 \ln n$$

$$P[\sum_{\text{non-ott}}] \leq e^{-3}$$

$$P[\sum_{\text{non-ott}}] = P[\text{fatt.} > \sigma + 2 \ln n] \\ \leq \frac{1}{2} \quad (\text{Teorema 2 con } \alpha = 2)$$

$$P[\text{OK}] = 1 - P[\sum_{\text{non-ott}} \cup \sum_{\text{non-ott}}]$$

$$\text{union bound} \geq 1 - (P[\sum_{\text{non-ott}}] + P[\sum_{\text{non-ott}}])$$

$$\geq 1 - (e^{-3} + \frac{1}{2}) \approx 45\%$$

□