PROBLEMA VERTEX COVER

INPUT: $G=(V,E)$ grafo non orientato

$w_i \in \mathbb{Q}^+ \quad (i \in V)$

SOL. ACCETTABILE: $X \subseteq V$
t.c. $\forall e \in E \quad e \cap X \neq \emptyset$

FUNZ. OBIETTIVO: $w = \sum_{i \in X} w_i$

TIPO: MIN

VERTEX COVER $\leq_p$ SET COVER

$$x = \left(G=(V,E), (w_i)_{i \in V}, \overline{w} \right)$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \left(\{S_1, \dots, S_m\}, (v_i)_{i \in \{1,\dots,m\}}, \overline{v} \right)$$

$m = |V|$

$\forall i \in V$

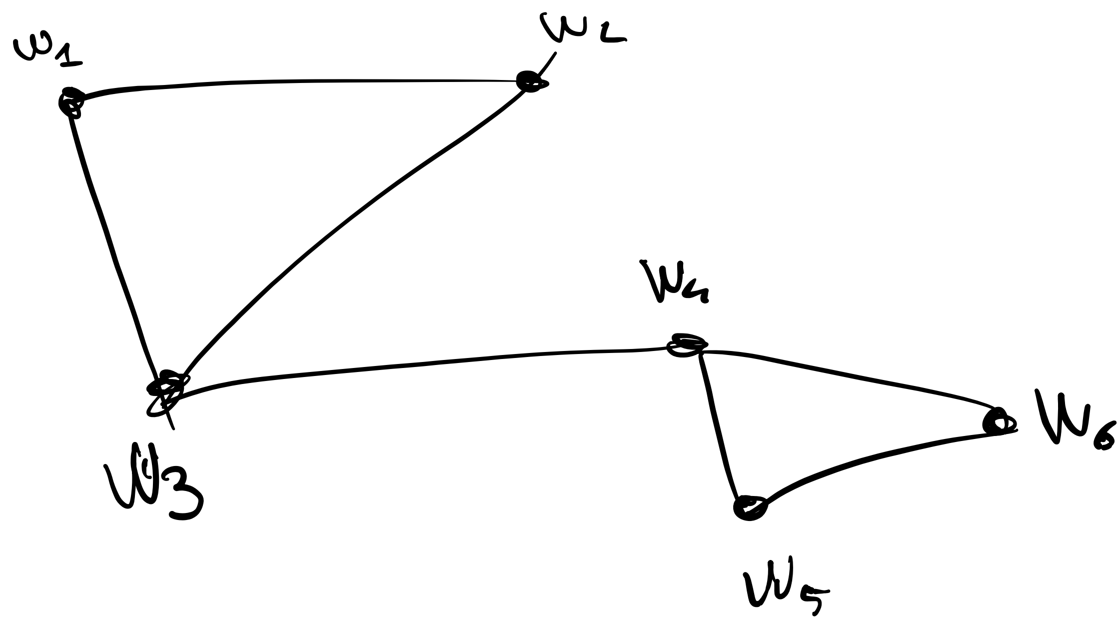
$S_i = \{e \in E \mid i \in e\}$

$v_i = w_i$

$\overline{v} = \overline{w}$

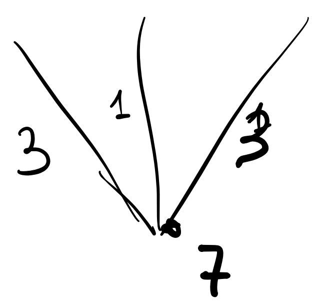
Proprietà: VertexCover è $H(D)$-appross.
dove D è il grado massimo del grafo.

VertexCover mediante Pricing



$\boxed{\langle P_e \rangle_{e \in E}}$ prezzatura

- equa sse $\forall i \in V \quad \sum_{\substack{e \text{ t.c.} \\ i \in e}} P_e \leq w_i$



- Una prezzatura $\langle P_e \rangle$ è stretta sul vertice $\bar{i} \in V$ se

$$\sum_{\substack{e \text{ t.c.} \\ \bar{i} \in e}} p_e = w_i$$

ALGORITMO PRICING VERTEX COVER

$p_e \leftarrow 0 \quad \forall e \in E$

while $\exists \{i,j\} \in E$ t.c. $\langle p_e \rangle$ non è stretto né su i né su j

- Sia $\bar{e} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ un tale lato

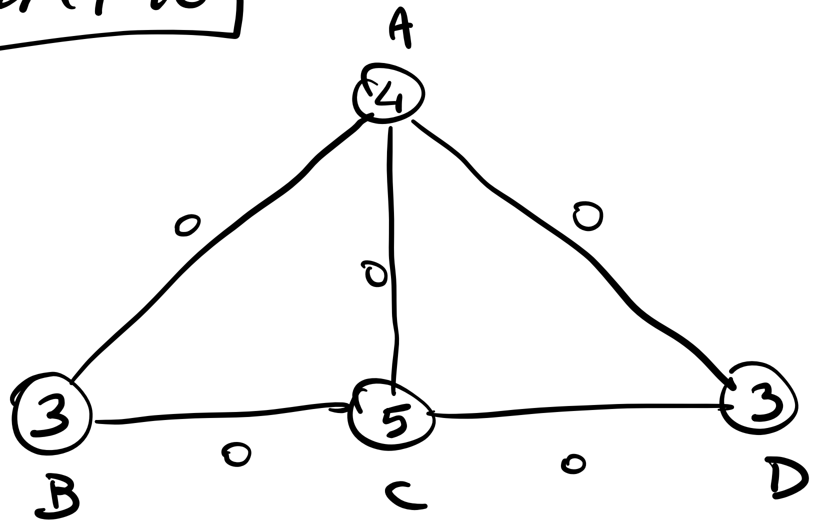
$$\Delta \leftarrow \min\left(\underbrace{w_{\bar{i}} - \sum_{\substack{e \\ \bar{i} \in e}} p_e}, \underbrace{w_{\bar{j}} - \sum_{\substack{e \\ \bar{j} \in e}} p_e} \right)$$

$$p_{\bar{e}} \leftarrow p_{\bar{e}} + \Delta$$

$X \leftarrow$ insieme dei vertici i su cui $\langle p_e \rangle$ è stretto

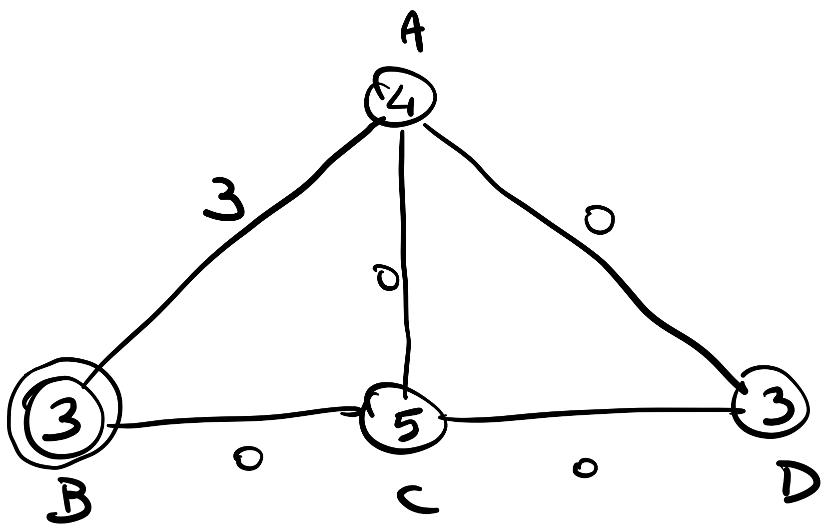
output X

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$



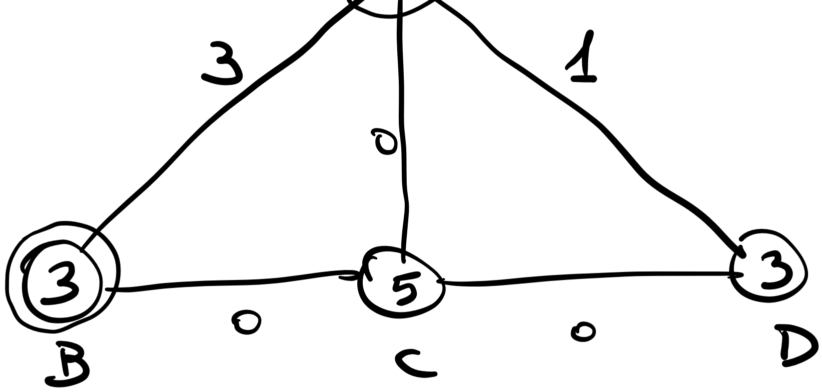
$\Downarrow$ $\{A, B\}$

$$\Delta = \min(4-0,\ 3-0) = 3$$



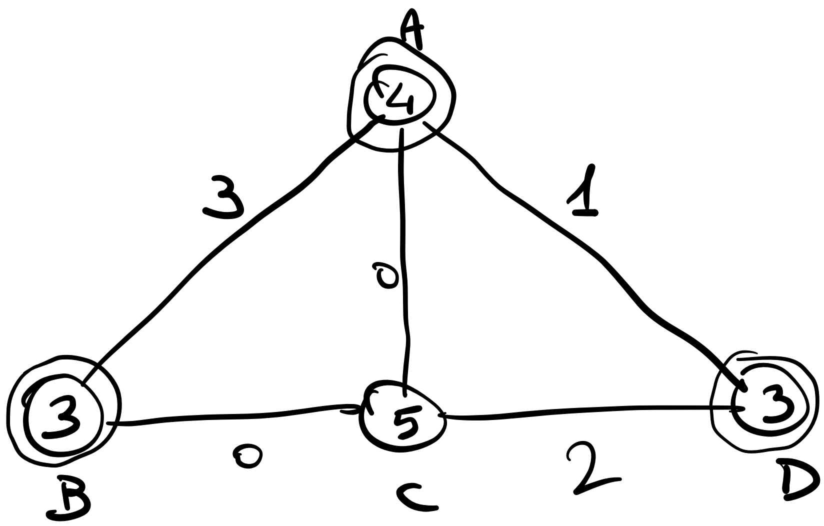
$\Downarrow$ $\{A, D\}$

$$\Delta = \min(4-3,\ 3-0) = 1$$



$\Downarrow \quad \{C, D\}$

$\Delta = \min(5-0, 3-1) = 2$



$\boxed{10}$

Lemma 1: Se $\langle p_e \rangle$ è una prezzatura equa, allora

$$\sum_{e \in E} p_e \le w^*$$

Dim: $\forall i$ $\boxed{\sum p_e \le w_i}$ (def di equo)

$$\boxed{\sum_{\substack{e \\ i\in e}} \ldots}$$

$$\sum_{e\in E} p_e \le \underbrace{\sum_{i\in X^*} \boxed{\overset{\le w_i}{\sum_{\substack{e \\ i\in e}} p_e}}}_{\forall e\in E \text{ coperto}} \le \sum_{i\in X^*} w_i = w^* \qquad \square$$

Lemma 2: La soluzione w trovata da PRICING VERTEX COVER soddisfa

$$w \le 2 \sum_{e\in E} p_e$$

Dim:

$$w = \underbrace{\sum_{i\in X}}_{\text{insieme dei vertici su cui } p_e \text{ è stretto}} \overset{\text{stretto}}{\boxed{w_i}} = \sum_{i\in X} \underbrace{\boxed{\sum_{\substack{e \\ i\in e}} p_e}}_{\forall e \text{ coperto } \le 2 \text{ volte}} \le$$

$$\le 2 \sum_{e\in E} p_e \qquad \square$$

Teorema: PRICING SET COVER è una 2-approssimazione

Dim:

$$\frac{w}{w^*} \underset{\text{Lemma 2}}{\leq} \frac{2\sum_{e\in E} p_e}{w^*} \underset{\text{Lemma 1}}{\leq} \frac{2\sum_{e\in E} p_e}{\sum_{e\in E} p_e} = 2$$

$\square$

Non è noto nessun algoritmo polinomiale migliore.

VERTEX COVER $\notin$ PTAS

Problema Congested Paths

INPUT: $G=(N,A)$ grafo orientato

$s_0,\dots,s_{k-1},\ t_0,\dots,t_{k-1}\in N$

$c\in\mathbb{N}^+$

SOL. AMMISSIBILE: $I\subseteq k$

e $\forall i\in I$ un cammino

$\pi_i : s_i \rightsquigarrow t_i$

t.c. $\forall a\in A$, non ci sono più di c cammini π_i che passano per a

FUNZ. OBIETTIVO: $|I|$

TIPO: MAX

- $\ell : A \to \mathbb{R}^+$

$$\pi = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$$

$$\ell(\pi) = \ell(x_1,x_2)+\ell(x_2,x_3)+$$

$\ldots + \ell(x_{i-1}, x_i)$

ALGORITMO PRICING CONGEST PATHS

INPUT: input del problema

$+ \quad \beta > 1$

$I \leftarrow \emptyset$

$P \leftarrow \emptyset$

$\ell(a) = 1 \qquad \forall a \in A$

forever

- find the shortest paths π_i connecting (s_i, t_i) for some $i \notin I$
- if such path $\nexists$ break
- $I \leftarrow I \cup \{i\}$

  $P \leftarrow P \cup \{\pi_i\}$

  for all arcs $a \in \pi_i$

  $\ell(a) \leftarrow \ell(a) * \beta$

  if $\ell(a) = \beta^c$

  delete a

output I, φ ...