

# MAX E<sub>k</sub> SAT E SUA DERANDOMIZZAZIONE

INPUT: Formula CNF in cui  
 ogni clausola contiene esattamente  
 $k$  letterali (su variabili distinte)  
 $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$   
 $\downarrow$   
SOL. AMMISSIBILI: Assegnamenti di  
 valori di verità delle  
 variabili  
FUNZ. OBIETTIVO: # Clausole soddisfatte  
TPD: MAX

Teorema: Un assegnamento casuale delle  
 variabili rende vere  $\geq (2^k - 1)/2^k$   
 delle clausole in valore atteso.

$T \neq$  clausole

$$\left[ \frac{2^k - 1}{2^k} T \right] \leq c^* \leq [T]$$

$$E[c] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} T$$

$$\left[ \frac{c^*}{E[c]} \right] \leq \frac{T}{\frac{2^k - 1}{2^k} T} = \left[ \frac{2^k}{2^k - 1} \right]$$

Din: Siano  $x_1, \dots, x_n$  le variabili  
che caprono nella formula in  
input  
Sia  $X_i \sim \text{Unif}\{0,1\}$   $\forall i=1, \dots, n$   
e Clausola  $j$

$$C_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

se la clausola  
 $j$ -esima è  
soddisfatta

altrimenti

Sia  $t$  il numero di clausole,  
e  $T$  il numero di clausole  
soddisfatte.

$$E[T] =$$

legge del valore  
atteso totale

$$= \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \sum_{b_2 \in \{0,1\}} \dots \sum_{b_n \in \{0,1\}} E[T | X_1=b_1, \dots, X_n=b_n] \cdot \underbrace{P[X_1=b_1, \dots, X_n=b_n]}_{\text{ind. p. degli } X_i} =$$

$$= \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \sum_{b_2 \in \{0,1\}} \dots \sum_{b_n \in \{0,1\}} E[T | X_1=b_1, \dots, X_n=b_n] \cdot \underbrace{P[X_1=b_1]}_{\text{ind. p. degli } X_i} \cdot \dots \cdot \underbrace{P[X_n=b_n]}_{\text{ind. p. degli } X_i} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \dots \sum_{b_n \in \{0,1\}} E[T | X_1=b_1, \dots, X_n=b_n] =$$

$$T = C_1 + \dots + C_t$$

$$\text{(linearity)} \quad \sum_{j=1}^t E[C_j | X_1=b_1, \dots, X_n=b_n]$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{b_n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^n$$

$$c_j = x_3 \vee \neg x_4 \vee x_7$$

Assegnamenti :  $2^n$   
 Assegnamenti delle variabili non coinvolte in  $c_j$  :  $2^{n-k}$

Per ognuno di essi, ce n'è uno che rende falsa  $c_j$

Ci sono

$$2^n - 2^{n-k}$$

combinazioni di  $b_1 \in \mathbb{Z}, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$  che rendono  $c_j = 1$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^t (2^n - 2^{n-k}) =$$

$$\frac{1}{2^n} (t \cdot 2^n - 2^{n-k})$$

$$= \frac{t}{2^n} \quad 2^n - 2^n$$

$$E \left[ \frac{T}{t} \right] = \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n} =$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{dividendo} \\ \text{por } 2^{n-k} \end{array} \right) = \frac{2^k - 1}{2^k} \quad \square$$