

Lemma: Per ogni $j = 0, \dots, n$
 esistono $b_1, b_2, \dots, b_j \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$E[T | X_1 = b_1, \dots, X_j = b_j] \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

Dim: per induzione su j .
 Il caso $j=0$, Teorema precedente.
 Passo induttivo: esistono $b_1, \dots, b_{j-1} \in \mathbb{Z}$

$$(*) \quad \frac{2^k - 1}{2^k} t \leq E[T | X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}] =$$

$$= E[T | X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 0] P[X_j = 0]$$

$$+ E[T | X_1 = b_1, \dots, X_{j-1} = b_{j-1}, X_j = 1] P[X_j = 1]$$

$$= e_0 \frac{1}{2} + e_1 \frac{1}{2}$$

legge del valore atteso totale

Supponiamo p. 2. che

$$e_0 < \frac{2^k - 1}{2^k} t \quad e_1 < \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

Allora

$$\frac{2^k - 1}{2^k} t \leq e_0 \frac{1}{2} + e_1 \frac{1}{2} < \frac{2^k - 1}{2^k} t$$

$$\frac{2^k - 1}{2^k} < \frac{2^k - 1}{2^k} \quad \text{IMPOSS.}$$

□

Corollario: Esiste un algoritmo
[$b_1, \dots, b_n \in 2$ t.c.
il numero di clause
soddisfatte è
 $\geq \frac{2^{k-1}}{2^k} \epsilon$]

ALGORITMO DERANDOMIZZATO

```
D ← ∅  
for i = 1, 2, ..., n  
| Δ0 ← ∅  
| Δ1 ← ∅  
| ΔD0 ← ∅  
| ΔD1 ← ∅  
| for j = 1, ..., t  
| | if j ∈ D continue  
| | if xi non compare  
| | nella clausola j-esima continue  
| h ← numero di variabili di  
| indice ≥ i nella  
| clausola j-esima
```

if x_i Compare positive

$$\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 - \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta D_1 \leftarrow \Delta D_1 \cup \{i\}$$

else

$$\Delta_0 \leftarrow \Delta_0 + \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 - \frac{1}{2^h}$$

$$\Delta D_0 \leftarrow \Delta D_0 \cup \{i\}$$

if $\Delta_0 > \Delta_1$

$$x[i] = 0$$

$$D \leftarrow D \cup \Delta D_0$$

else

$$x[i] = 1$$

$$D \leftarrow D \cup \Delta D_1$$

Studiamo come cambia

$$E[C_j | X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = b_i]$$

secondo del valore di b_i

cioè

$$\Delta = E[C_j | X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}, X_i = b_i] - E[C_j | X_1 = b_1, \dots, X_{i-1} = b_{i-1}]$$

- il valore di C_j è
- 1) se già determinato da $X_1, \dots, X_{i-1}$
 - 2) se X_i non compare in C_j

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

X_i compare in C_j positiva

$$X_i = 0$$

ci sono

$$\frac{2^{n-1}}{n}$$

25 representing total
 the 10 renders
 vera

$$\Delta = \left(\frac{2^{h-1} - 1}{2^{h-1}} \right) - \left(\frac{2^h - 1}{2^h} \right) = \frac{2^h - 2 - 2^h + 1}{2^h}$$

$$= - \frac{1}{2^h}$$

$$x_i = 1$$

$$\Delta = 1 - \frac{2^h - 1}{2^h} = \frac{2^h - 2^h + 1}{2^h}$$

$$= \frac{1}{2^h}$$

h=1

$$\left(\frac{2^0 - 1}{2^0} \right) - \left(\frac{2^1 - 1}{2^1} \right)$$

$$\frac{2^h - 1}{2^h} = \frac{2^h - 2^h + 1}{2^h}$$

Teorema: L'algoritmo deterministico
 è una $\frac{2^k}{2^k - 1}$ - approssimazione
 per MAXE_k SAT

Dim.: Sia $\bar{t}$ il numero di
 soddisfatte dall'algoritmo
 e sia t^* l'ottimo

$$\frac{t^*}{\bar{t}} \leq \frac{t}{\bar{t}} \leq \frac{\bar{t} \frac{2^k}{2^k - 1}}{\bar{t}} = \frac{2^k}{2^k - 1}$$

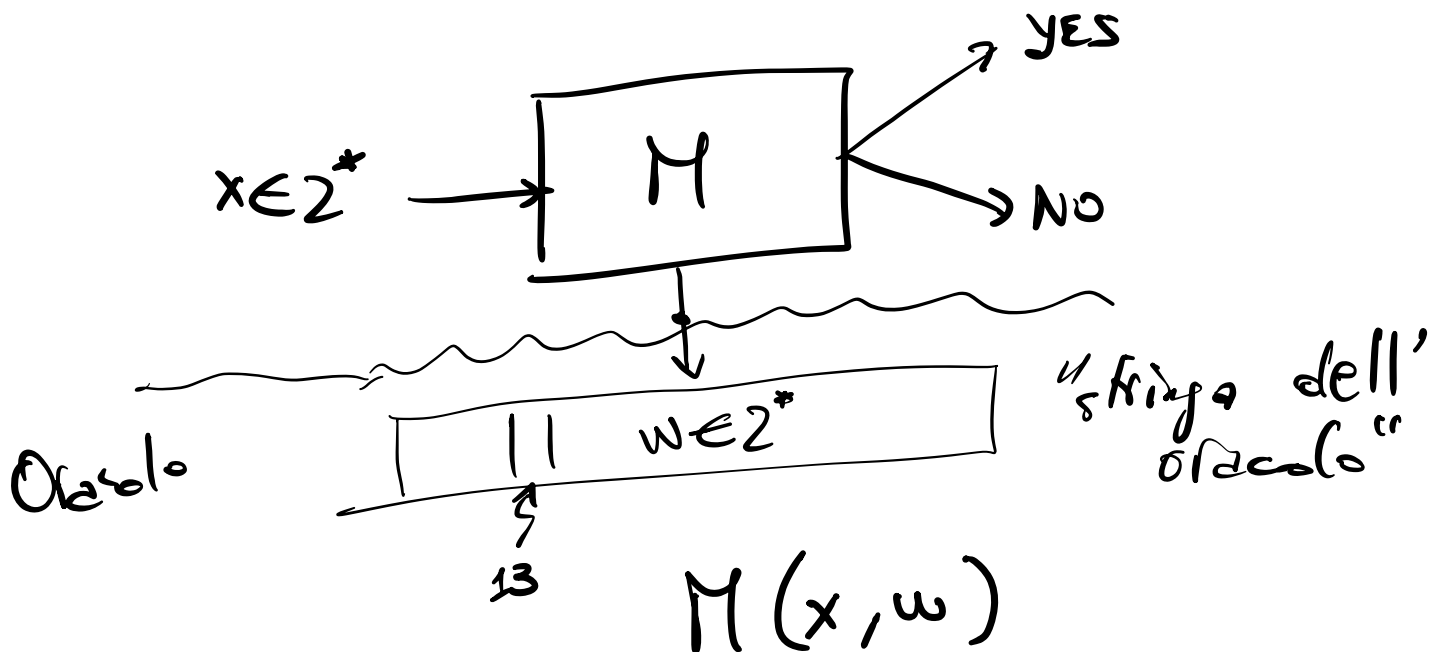
$$\bar{t} \geq \frac{2^k - 1}{2^k} t \Rightarrow t \leq \frac{\bar{t} 2^k}{2^k - 1}$$



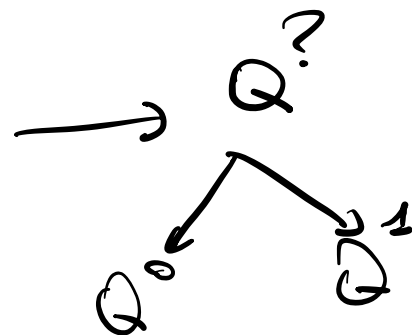
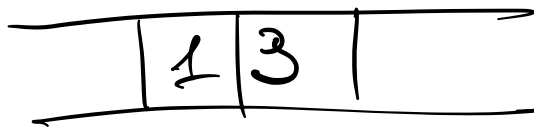
INTRODUZIONE AL TEOREMA PCP (Probabilistically Checkable Proofs)

PROBLEMI DI DECISIONE

MdT CON ORACOLO

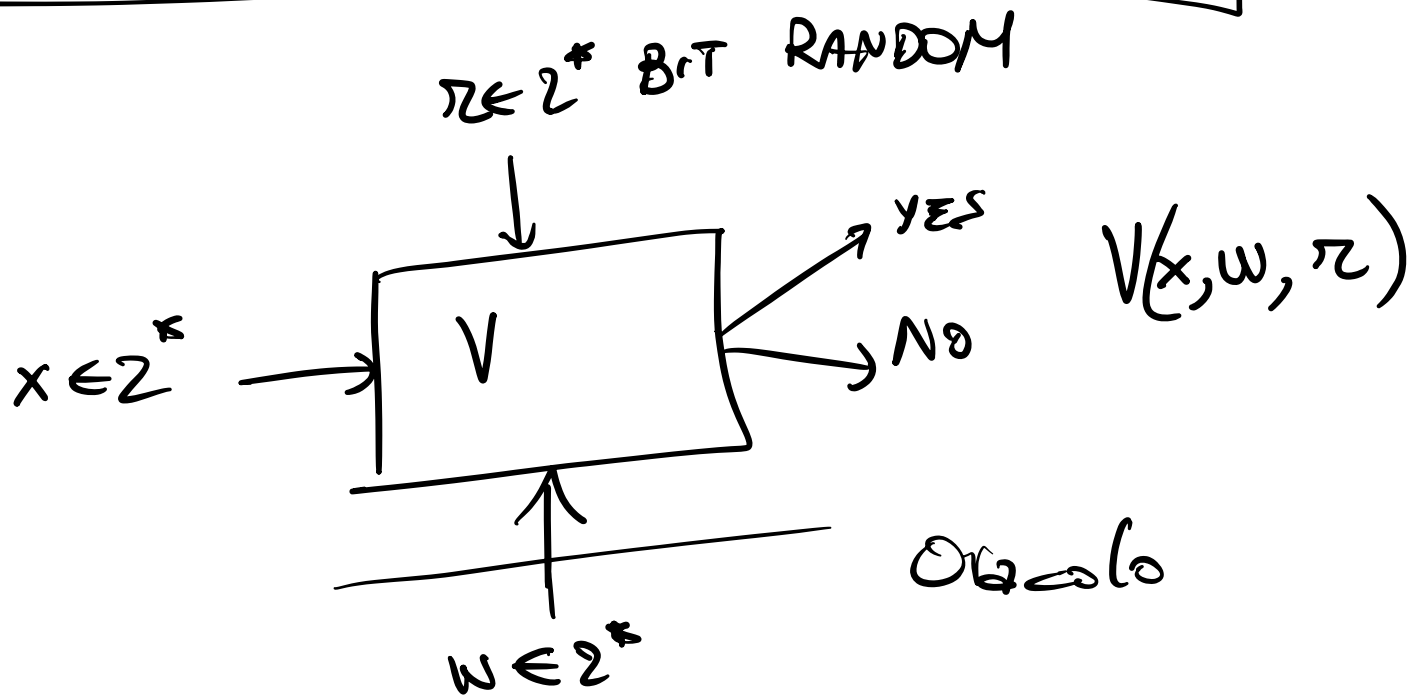


NASTRO DI QUERRE



Teorema: $L \subseteq 2^*$ sta in NP
 se esiste una M_{NT} con
 oracolo V ("verificatore") t.c.
 1) $V(x, w)$ risponde in
 tempo polinomiale in $|x|$
 2) $\forall x \in 2^*$
 $\exists w \in 2^*$ t.c. $V(x, w) = YES$
se $x \in L$

MdT CON ORACOLO E
 PROBABILISTICHE
 = PROBABILISTIC CHECKERS
 (VERIFIERS)



$$P[V(x, w) = \text{YES}] = \mu(\{\pi \mid V(x, w, \pi) = \text{YES}\})$$