ALGORITMO CENTER SELECTION PLUS

INPUT: $\boxed{S \subseteq \Omega,\ k \in \mathbb{N}^+,}$ INPUT DI CENTER SELECTION
$r \in \mathbb{R}^+$

$C \leftarrow \emptyset$

while $S \neq \emptyset$
- take any $\bar{s} \in S$
- $C \Leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$
- remove from S all x s.t. $d(x, \bar{s}) \leq 2r$

if $|C| > k$
output "Impossibile"

else
output C

Teorema: Se CENTER SELECTION PLUS emette un output, quell'output è una $\frac{2r}{r^*}$-approssimazione per CENTER SELECTION

Dim: $\forall s \in S$ s è stato cancellato

$\Rightarrow \exists \bar{s} \in C$ t.c.

$d(s, \bar{s}) \leq 2r$

$\Rightarrow \rho(C) \le 2r$

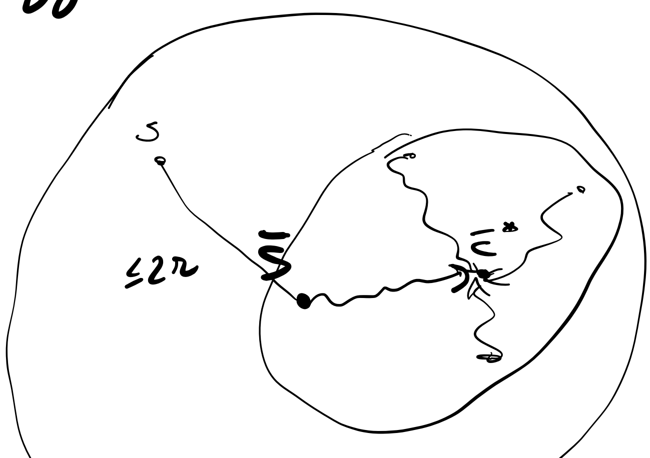
$$\frac{\rho(C)}{\rho^*} \le \frac{2r}{\rho^*} \qquad \square$$

Teorema: Se $r \geq \rho^*$, allora CENTERSELECTIONPLUS emette un output.

Dim: Sia C^* una soluzione ottima.

$$\rho(C^*) = \rho^*$$

Eseguiamo l'algoritmo con $r \geq \rho^*$.
Viene aggiunto $\bar{s}$ all'insieme dei centri



Fatto: Se s' nella soluzione ottima si rivolge allo stesso centro $\bar{c}^*$ a cui si rivolge $\bar{s}$, s' viene cancellato subito dopo l'aggiunta di $\bar{s}$ (a meno che non fosse già stato cancellato).

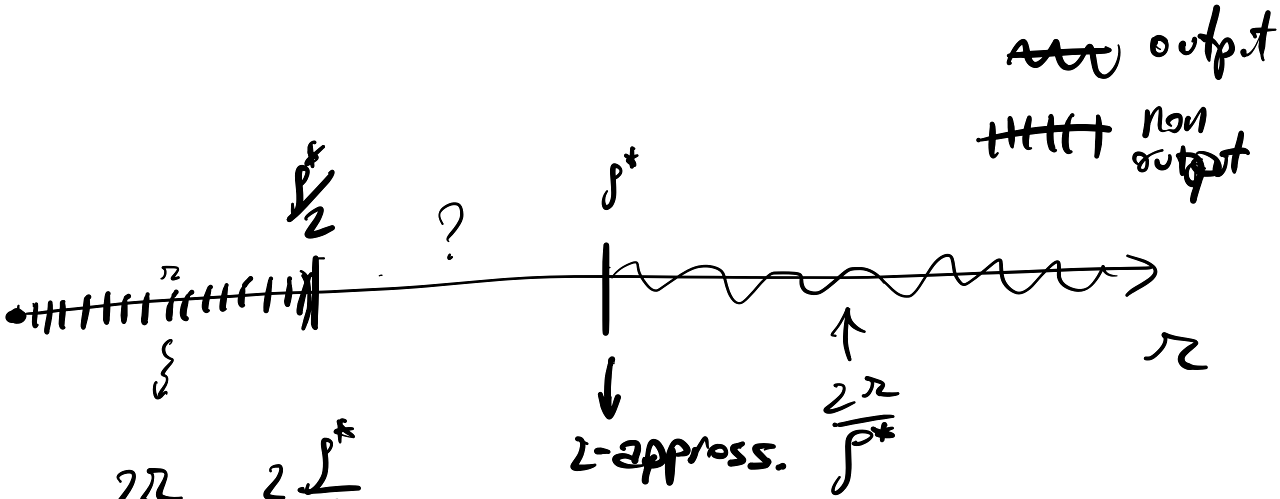
$$d(s',\bar{s}) \overset{TRIANG}{\le} \underbrace{d(s',\bar{c}^*)}_{\le \rho^*} + \underbrace{d(\bar{c}^*,\bar{s})}_{\le \rho^*}$$

$$\le 2\rho^* \le 2r$$

$\Rightarrow$ Un'intera cella di Voronoi della soluzione ottima viene eliminata a questa iterazione

$\Rightarrow$ Dopo $\le K$ iterazioni non ci sono più punti in S

$\Rightarrow |C| \le K$ $\Rightarrow$ corretto output. $\square$



$$\frac{2r}{\rho^*} < \frac{2\frac{\rho^*}{2}}{\rho^*} \le 1$$

ALGORITMO GREEDY CENTER SELECTION

INPUT: $S \subseteq \Omega$, $K \in \mathbb{N}^+$

if $|S| \le K$

- output S
- stop

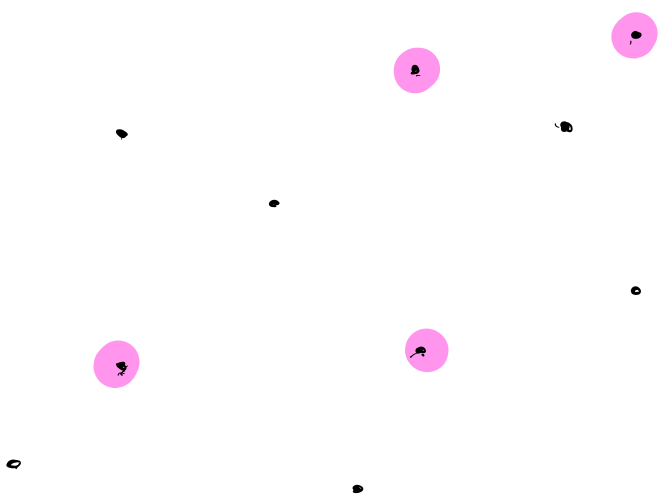
choose any $\bar{s} \in S$

$C \leftarrow \{\bar{s}\}$

while $|C| < K$

- select $\bar{s}$ maximizing $d(s, C)$
- $C \leftarrow C \cup \{\bar{s}\}$

output C



$K=4$

Proprietà: L'esecuzione di GREEDY CENTER SELECTION è una delle esecuzioni possibili di CENTER SELECTION PLUS quando $r = \rho^*$.

Dim: $r = \rho^*$

(1)

```
INPUT: S ⊆ Ω, k ∈ N, r ∈ R+
C ← ∅
while ∃s d(s,C) > 2r
    take any s̄ ∈ S such that d(s̄,C) > 2r
    C ← C ∪ {s̄}
if |C| > k
    output "Impossibile"
else
    output C
```

$\bar{s}'$

(2)

```
INPUT: S ⊆ Ω, k ∈ N+
if |S| ≤ k
    output S
    stop
choose any s̄ ∈ S
C ← {s̄}
while |C| < k
    select s̄ maximizing d(s,C)
    C ← C ∪ {s̄}
output C
```

$\bar{s}''$

$$d(\bar{s}'', C) \geq \underbrace{d(\bar{s}', C) > 2r}$$

$\Rightarrow$ anche $\bar{s}''$ sarebbe sceglibile da (1)

$$\Rightarrow d(\bar{s}'', C) = d(\bar{s}', C) \qquad \square$$

Corollario: GREEDY CENTER SELECTION è 2-approssima

Una 2-approssimazione □

INAPPROSSIMABILITÀ DI CENTER SELECTION

Teorema: Se $P \neq NP$, per nessun $\alpha < 2$ esiste un algoritmo polinomiale che α-approssimi CENTER SELECTION

Dim:

$\{3, 7\}$ $\quad E \subseteq \binom{V}{2}$

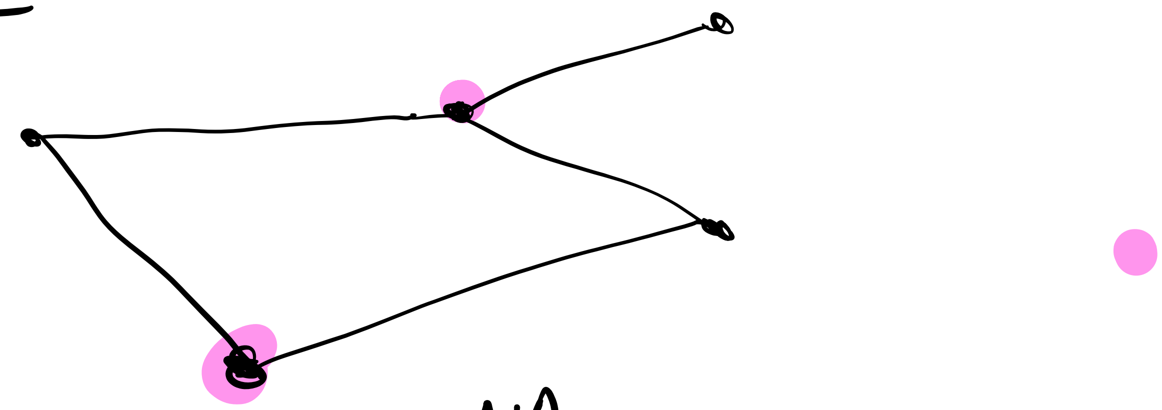
DOMINATING SET

INPUT: $G = (V, E)$ grafo non orientato

$k \in \mathbb{N}^+$

OUTPUT: $\exists D \subseteq V$ t.c. $|D| \leq k$

e $\forall e \in E \quad e \cap D \neq \emptyset$



DOMINATING SET $\in NPc$

Per assurdo, supponiamo che esista un algoritmo $\alpha < 2$ e

A per CENTER SELECTION che fornisce in tempo polinomiale

in tempo poli...
una α-approssimazione.
Usiamolo per decidere in tempo pol. dominating set.

$$k \in \mathbb{N}^+$$

$$G=(V,E)$$

$$\downarrow$$

$$\Omega = S = V$$

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } uv \in E \\ 2 & \text{se } uv \notin E \\ 0 & \text{se } u = v \end{cases}$$

Dimostriamo che $\forall u,v,w$ distinti

$$\underbrace{d(u,v)}_{1 \circ 2} \leq \underbrace{\underbrace{d(u,w)}_{1 \circ 2} + \underbrace{d(w,v)}_{1 \circ 2}}_{2 \circ 3 \circ 4}$$

$$(\Omega, d),\ S = \Omega = V,\ k \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow C \subseteq V \qquad 1 \leq \frac{\rho(C)}{\rho^*} \leq \alpha$$

$$\rho^*(V,k) \in \{1,2\}$$

$\rho^*(V,k) = 1$ sse $\exists C \subseteq V$ t.c. $|C| \leq k$ e $\forall x \in V \ \ d(x,C) \leq 1$

sse $\forall e \in E \quad e \cap C \neq \emptyset$

sse C è un dominating set

$$\rho^* \le \rho(C) \le \alpha \rho^*$$

$\rho^* = 1$: $\quad 1 \le \rho(C) \le \alpha$

$\rho^* = 2$: $\quad 2 \le \rho(C) \le 2\alpha$

$$1 \le \rho(C) \le \alpha \quad < \quad 2 \le \rho(C) \le 2\alpha$$

$\rho(C) < 2$ sse $\rho^* = 1$

sse $\exists$ dominating set

$\square$