

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 0 & x_2 = 1 & x_3 = 0 & - \\ x_1 = 0 & x_2 = 1 & x_3 = 1 & 1 \\ & & & \vdots \end{array}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge \dots \wedge$$

Teorema: Esiste un $\bar{\epsilon} > 0$ t. c.

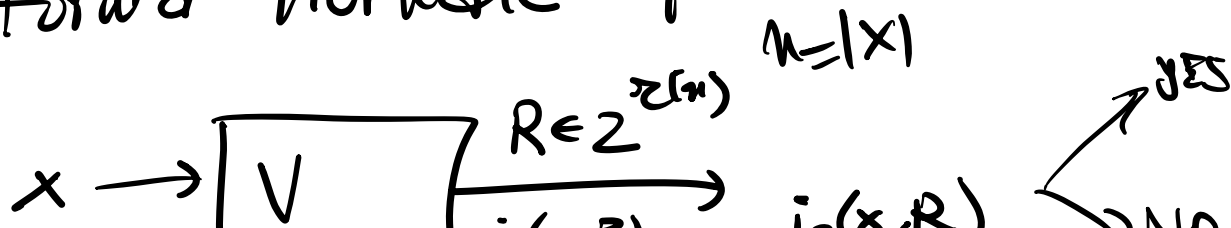
MaxCNFSAT non è

$(1 + \bar{\epsilon})$ -approssimabile

(in tempo polinomiale, a meno
che $P = NP$)

Dici: Sia $L \in NP$ -completo.

Quindi $L \in NP = PCP[\pi(n), q]$
per qualche $\pi(n) \in O(\log n)$ e
 $q \in \mathbb{N}$. Sia V un vertice
in forma normale per L .



V è descrivibile come segue:

1) fissato

l'input $x \in 2^*$

2) fissato

$R \in 2^{n(1)}$

interroga
posizione

l'oracolo w in 9

$i_1(x, R), \dots, i_9(x, R)$

e accetta/rifiuta

$$f(\underbrace{w_{i_1(x, R)}, \dots, w_{i_9(x, R)}}_{\text{input}}) \in 2$$

$\Downarrow$ (Lemma)

descrivibile come una

formula

$\varphi_{x, R}$

CNF

nelle

variabili

$w_{i_1(x, R)}, \dots, w_{i_9(x, R)}$

con

$= 2^9$

clausole di

9

letterali.

E.g.

$\varphi_{x, R}$

$$= (w_3 \vee x_7 \vee \neg w_8) \wedge (w_3 \vee \neg w_2 \vee w_8)$$

Chiamiamo

$$\Phi = \bigwedge_{x, R} \varphi_{x, R}$$

$\Phi_x \quad R \in 2^{(n)}$

$P(n) = 2^9 2^{n(n)}$
 numero
 di clause
 in Φ_x

- 1) Φ_x è fatto da q letterali ciascuna
 con 9 letterali
- 2) Φ_x contiene ~~esattamente~~ $q + o(q|x|)$
 $2^9 2^{n(n)} = 2^{9 + n(n)} = 2^{q + o(q|x|)}$
 clause $P(n) \in Poly$

Sia t_x^* il massimo numero
 di clause soddisfatti
 in Φ_x

- i) se $x \in L$, $\exists w$ che fa accettare
 con prob. $1 \Rightarrow$
 $\exists$ assegnazione w che rende
 vere tutte le $\varphi_{x,r}$ contempor.
 $\Rightarrow$ cioè che rende vera Φ_x
 $\Rightarrow \Phi_x$ è soddisfacibile

$1 * P(|x|)$

2) Se $x \notin L$, $\forall w$ fa accettare
con probabilità $< \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \forall w$ non soddisfa
 $\geq \frac{2^{r(|x|)}}{2}$ delle $\underbrace{\varphi_{x,R}}_{2^r \text{ clause}}$

$\downarrow$
almeno una
delle clause
è falsa

$\Rightarrow \forall w$ non soddisfa
 $\geq \frac{2^{r(|x|)}}{2}$ clause

$\Rightarrow \forall w$ soddisfa $2^{r(|x|)}$
 $< P(|x|) - \frac{2^{r(|x|)}}{2} =$

$\frac{P(|x|)}{2^{r(|x|)}} = \frac{1}{2^r}$

$P(|x|)$

$P(|x|)$

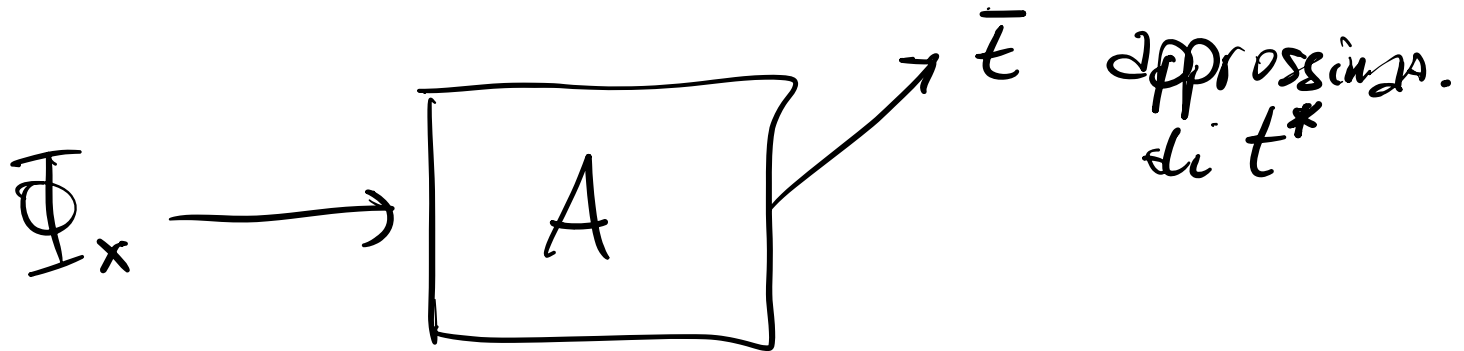
$$= P(|x|) - \frac{P(|x|)}{2^q \cdot 2} =$$

$$= P(x) - \frac{P(|x|)}{2^{q+1}}$$

$$\Rightarrow t_x^* \leq P(|x|) - \frac{P(|x|)}{2^{q+1}}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2^{q+1}}$$

Supponiamo per assurdo che
 ci sia un algoritmo di
 ottimizzazione A che
 fornisce una $(1+\bar{\epsilon})$ approssimazione
 di Max CNF SAT



$$x \in L \Rightarrow t^* = P(|x|)$$

$$x \notin L \Rightarrow t^* \leq P(|x|) \left(1 - \frac{1}{2^{q+1}}\right)$$

$$x \in L \Rightarrow \bar{t} \geq \frac{t^*}{1 + \bar{\epsilon}} = \frac{P(|x|)}{1 + \bar{\epsilon}} = A_x$$

$$x \notin L \Rightarrow \bar{t} \leq t^* \leq P(x) (1 - \bar{\epsilon}) = B_x$$

Mostriamo che

$$B_x < A_x$$

se fosse

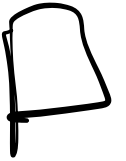
$$B_x \geq A_x$$

$$P(|x|) (1 - \bar{\epsilon}) \geq \frac{P(|x|)}{1 + \bar{\epsilon}}$$

$$1 - \varepsilon \geq 1$$

$$\bar{\varepsilon}^2 \leq 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = 0$$

IMPOSSIB.



Concluso: Esiste un $\bar{\varepsilon} > 0$ t. c.

MAX 3SAT non è
 $(1 + \bar{\varepsilon})$ -approximabile
 (in tempo polinomiale, a meno
 che $P = NP$)

$\Downarrow$ non è

$(\frac{8}{7} + \bar{\varepsilon})$ -approximabile

INAPPROSSIMABILITÀ DI MAX INDEPENDENT SET

INPUT: $G = (V, E)$ non orientato
SOL. AMM.: $X \subseteq V$ indipendenti
 $E \cap \binom{X}{2} = \emptyset$
FUNZ. OB.: $|X|$
TIPO: MAX

Teorema: Per ogni $\varepsilon > 0$, il
problema MAX INDEPENDENT SET
non è $(2 - \varepsilon)$ -approssimabile
in tempo polinomiale, se $P \neq NP$.

Dici: Sia $L \subseteq \Sigma^*$ NP-comp.

$L \in PCP[\tau(n), q]$ per

una specifica

$\tau(n) \in O(\log n)$ e $q \in \mathbb{N}$.

Sia V un verificatore per

L .

Per $x \in \Sigma^*$, costruiamo

G_x .

NODI x -configurazioni accettate

$(R, \{i_1: b_1, \dots, i_q: b_q\})$
 $\downarrow$ $\in \Sigma^{\tau(|x|)}$ $\nwarrow$ $\in \Sigma$
 $\nwarrow$ inter

R è la stringa random
estatta da V

$i_1, \dots, i_q$ sono le posiz.
estrate da V su input x

interposte da R
 e stringa $b_1 \dots b_q$ sono le risposte
 dell'oracolo

$$|V| \leq 2^{r(|x|)} \cdot 2^q$$

LATT

$(R, \{\bar{t}_i: b_1, \dots, \bar{t}_q: b_q\})$

?

$(R', \{\bar{t}'_1: b'_1, \dots, \bar{t}'_q: b'_q\})$

c'è un lato se le
 configurationi sono incompatibili,
 cioè

- $R = R'$

- oppure

$\exists k, k' \neq k, c.$

$$i_k = i_{k'} \quad \text{e} \quad b_k \neq b_{k'}$$

$$(001, \{3:0, 4:1, 7:3\})$$

$$(010, \{13:1, 4:0, 17:1\})$$

Fatto 1: $\forall x \in L, G_x$ ha
un insieme indipendente
di cardinalità $\geq 2^{|x|}$

Diam: $\exists w$ che fa accettare
con prob. 1.
Prendiamo tutte le
conf. accettate compatibili
con w .

Per il lemma di Goldstone non

Queste condizioni
hanno lati che le
dilegano.

$\Rightarrow$ insieme indipendente
card. $2^{r(x)}$. $\square$

Fatto 2: $\forall x \in L$, ogni
insieme indipendente di
 G_x ha cardinalità
 $\leq 2^{r(x)} - 1$.

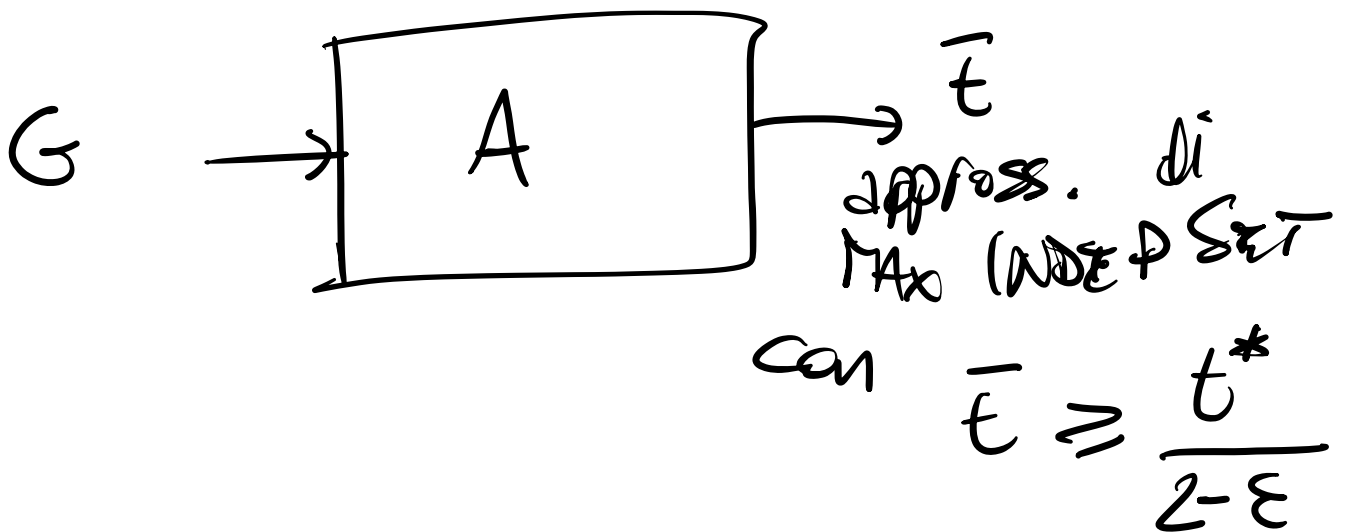
Dim: Se $S \subseteq V_{G_x}$ un insieme
indipendente con $|S| >$
 $2^{r(x)} - 1$

$\Rightarrow \exists w$ compatibile
con tutte le contig.

$\Rightarrow$ accetto con prob.

$\geq \frac{1}{2}$ IMPOSSIBILE $\square$

Sia t_x^* la cardinalità del
 MAX INDEPENDENT SET per G_x .
 $x \in L \xrightarrow{\text{Patto 1}} t_x^* \geq 2^{\frac{r(x)}{2}}$
 $x \notin L \xrightarrow{\text{Patto 2}} t_x^* < \frac{2^{\frac{r(x)}{2}}}{2}$



$$x \in L \Rightarrow \bar{t} \geq \frac{t^*}{2-\varepsilon} \geq \frac{2^{\frac{r(x)}{2}}}{2-\varepsilon} > \frac{2^{\frac{r(x)}{2}}}{2}$$

$$x \notin L \Rightarrow \bar{t} \leq t^* < \frac{2^{\frac{r(x)}{2}}}{2} \quad \square$$