INFORMATION-THEORETIC LOWER BOUND PER SEQUENZE MONOTONE

Def: n e U contare quante sono le sequenze

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} < U$$

$\Leftrightarrow$ multiinsiemi su $\{0, 1, \ldots, U-1\}$ di cardinalità n

$\Leftrightarrow$

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_{U-1} = n$$

contare le soluzioni intere non negative

$\Leftrightarrow$ STARS e BARS

$$***|||***|**||**$$

n $*$ $\qquad$ $U-1$ barre

$$\binom{U+n-1}{U-1} = \frac{(U+n-1)!}{n!\,(U-1)!} = \binom{U+n-1}{n}$$

$$Z_n = \log \binom{U+n-1}{n} \leftarrow \log\binom{A}{B} \approx B\log\frac{A}{B} + (A-B)\log\frac{A}{A-B}$$

$A = U+n-1$

$B = n$

$D = n$

$$Z_n \approx n \log \frac{U+n-1}{n} + (U-1) \log \underbrace{\frac{U+n-1}{U-1}}_{\approx 1} \approx \quad n \ll U$$

$$\approx n \log \frac{U+n-1}{n} =$$

$$= n \log \left(\frac{U}{n} \left(1 + \frac{n}{U} - \frac{1}{U} \right) \right) =$$

$$= n \log \frac{U}{n} + n \log \left(1 + \frac{n}{U} - \frac{1}{U} \right) \approx$$

$x \approx \log(1+x)$

$$\approx \underbrace{n \log \frac{U}{n}} + \frac{n^2}{U} \approx \quad \boxed{n^2 \ll U}$$

$$\approx \underbrace{n \log \frac{U}{n}}$$

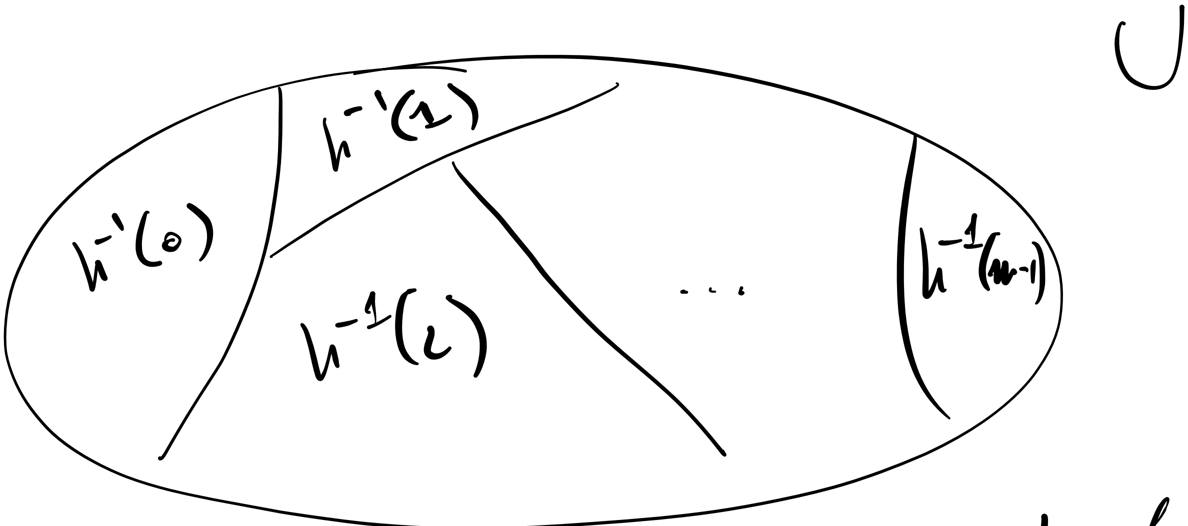
$$D_n \approx 3n + n \underbrace{\left[\log \frac{U}{n} \right]}$$

FUNZIONI SUCCINTE (DIZIONARIO, MAPPA, ARRAY ASSOCIATIVO)

PRELUDIO: HASH

universo, bucket

$$h: U \longrightarrow m$$



1) h sia "facile" da calcolare
   TEMPO $O(\lg U)$
2) la funzione occupi poco spazio
3) il più iniettiva possibile

$$S \subseteq U \qquad |S| << |U|$$

$|S| = n \quad n \le m$

$\boxed{\text{FULL-RANDOMNESS ASSUMPTION}}$

Dato U e m, si sceglie

$$h : U \to m$$

uniformemente a caso.

$$|U| \log m$$

$$U = \{a, b, \dots, z\}^{\le 18} \qquad n = 14$$

U	m
...	
...	

paolo boldi   7

...

	0	1		17
w	7	8	...	13

$h(\text{"paolo boldi"})$

0-26 0-26 0-26

FUNZIONI STATICHE

Dato U e un $n > 0$, ho una funzione

$$f : S \longrightarrow 2^n$$

con $S \subseteq U$.

Voglio rappresentare f.

$$x \in S \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f(x)$$

f

S	INDIRIZZO
"Paolo Boldi"	via Giovanni Tonti, 7
"Pippo Berti"	...
[illegible]	

Giuliana
Lassi
...

$U = \Sigma^{\le 100}$ $\Sigma = ASCII$

TECNICA MWHC

$S \subseteq U$ $f : S \to 2^r$

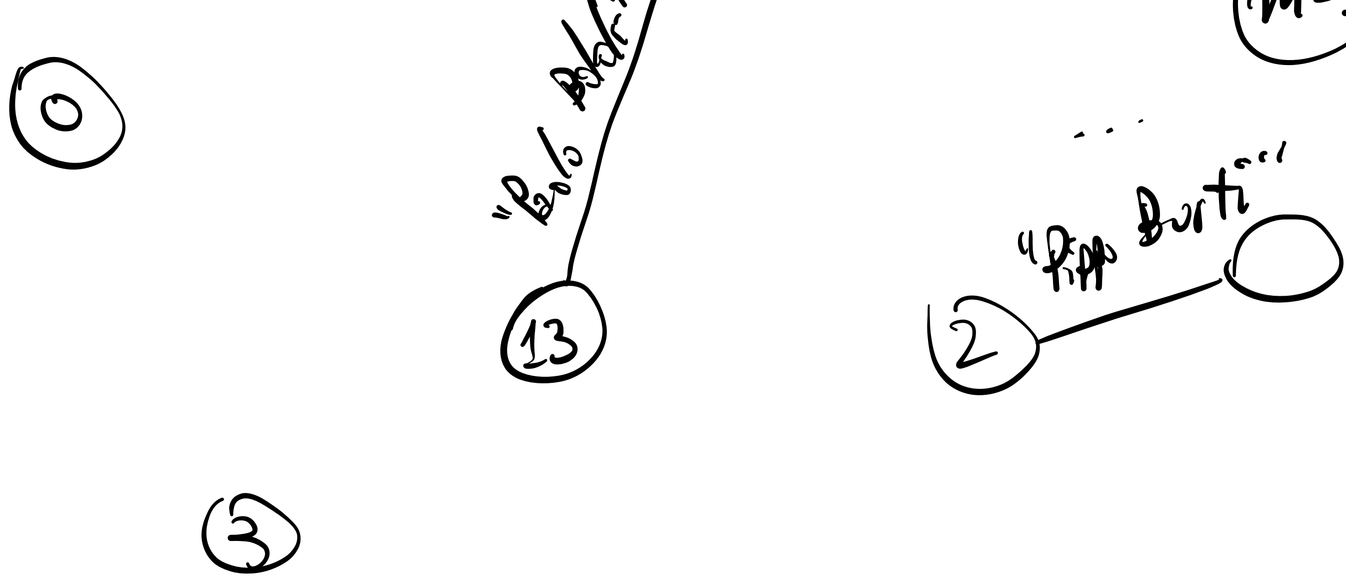
$|S| = n$

Fisso $m \in \mathbb{N}$ e due funzioni

$h_0, h_1 : U \to m$

Costruisco un grafo

1 m-1



$s \in S \longrightarrow$ dato $\quad h_0(s), h_1(s)$

n dati

1) $h_0(x) \neq h_1(x) \quad \forall x \in S$

2) $\{h_0(x), h_1(x)\} \neq \{h_0(y), h_1(y)\} \quad \forall x, y \in S \quad x \neq y$

3) G sia aciclico

$$\Downarrow$$

Vedo G come un insieme di equaz.

n equazioni

$$\left(X_{h_0(\text{"Paolo Boldi"})} + X_{h_1(\text{"Paolo Boldi"})}\right) \bmod 2^{r} = \text{"via Giovani Tonti, 7"}$$

$$\begin{cases} \left(X_{h_0(s)} + X_{h_1(s)}\right) \bmod 2^{r} = f(x) \\ \forall s \in S \end{cases}$$

m equazioni diofantee
con n incognite $(x_0, \dots, x_{n-1})$

ACICLICITÀ $\rightarrow$ SOLUBILITÀ

X	x_0	x_1	...	x_{n-1}
	0	1	...	$n-1$

$\uparrow$
SOLUZIONE DEL SISTEMA

nr bit

$$(x_{h_0(s)} + x_{h_1(s)}) \bmod 2^r = f(s)$$

Teorema: Se $m > 2.09\,n$

il grafo è quasi sempre

aciclico (e bastano 2 tentativi)

$$m = 2.09\, n$$

$$\boxed{2.09\, n r \quad \text{bit}}$$

PELABILITÀ DI UN IPERGRAFO

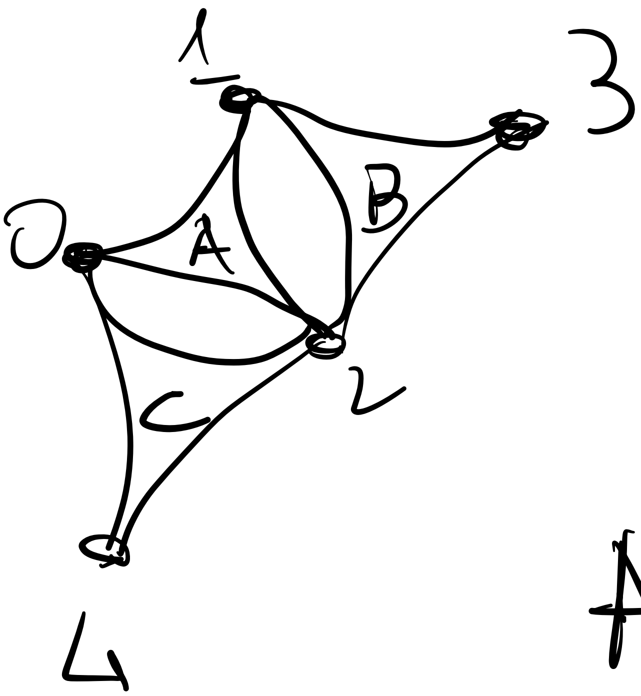
Un ipergrafo è pelabile se esiste un ordinamento

	HINGE	
e_0	x_0	
e_1	x_1	$x_i \in e_i$
$\vdots$	$\vdots$	
e	x	

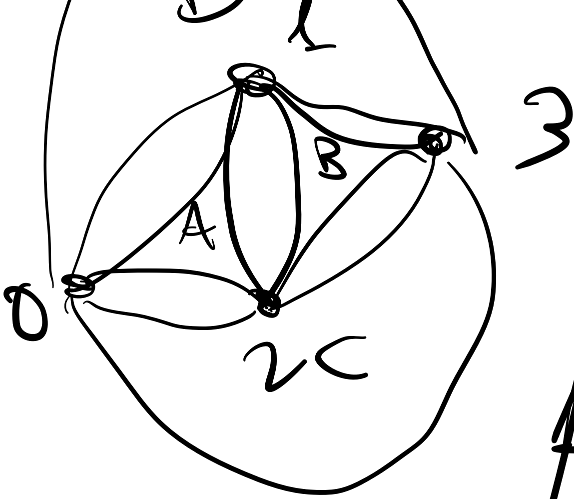
e_{k-1} x_{k-1}

iperlati vertici

t.c. $x_i \notin e_0 \cup \dots \cup e_{i-1}$



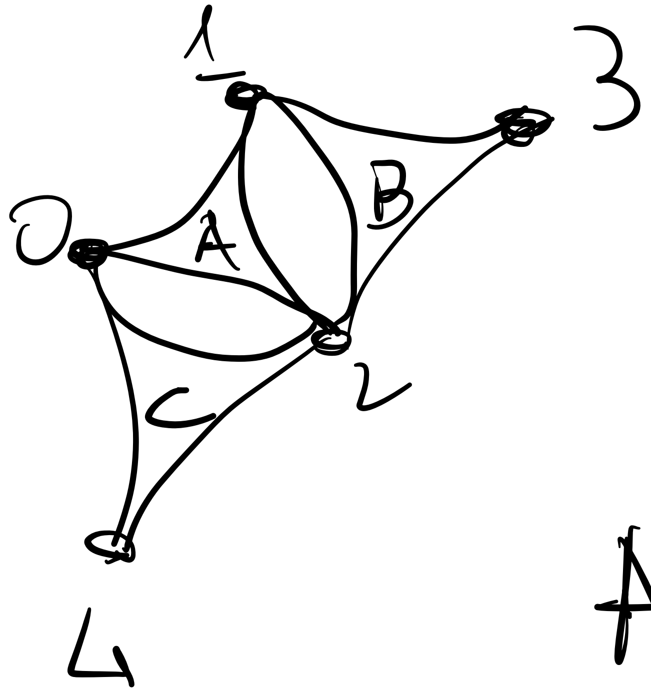
A	0
C	4
B	3



A 0

B 3

D

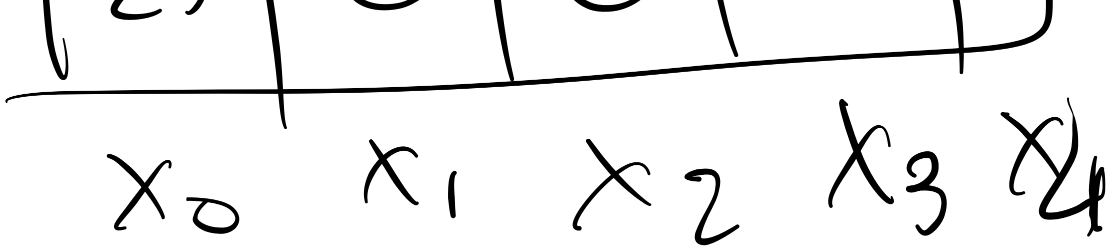


A	0
C	4
B	3

mod 100

A	$x_0 + x_1 + x_2 = 25$
C	$x_0 + x_2 + x_4 = 37$
B	$x_1 + x_2 + x_3 = 12$

25	0	0	12	12


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4