ALGORITMO PRICING CONGEST PATHS

INPUT: input del problema
+ $\beta > 1$

$I \leftarrow \emptyset$
$P \leftarrow \emptyset$
$\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A$

forever
- find the shortest paths π_i connecting (s_i, t_i) for some $i \notin I$
- if such path $\nexists$ break
- $I \leftarrow I \cup \{i\}$
  $P \leftarrow P \cup \{\pi_i\}$
  for all arcs $a \in \pi_i$
  $\ell(a) \leftarrow \ell(a) * \beta$
  if $\ell(a) = \beta^c$
  delete a

Nella prima fase posso rimandare le cancellazione

output I, φ

Def: Per una certa $\ell(-)$, un cammino π è corto se $\ell(\pi) < \beta^c$.

C_i = insieme di cammini corti utili prima dell'i-esima iterazion

utile $\rightarrow$ inutile

corto $\rightarrow$ lungo

$\exists \longrightarrow \nexists$

$$\underbrace{C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \ldots \supseteq}_{\substack{\text{l'alg. sceglie un} \\ \text{cammino corto utile} \\ \text{PRIMA FASE}}} C_s = \emptyset$$

$C_s \downarrow \bar{\ell}$

Lemma 1: Per ogni $i \in I^* \setminus I$,

$$\bar{\ell}(\pi_i^*) \geq B^c$$

Dim: $\overbrace{\text{PRIMA FASE}}$

$$\underbrace{\bar{\ell}(\pi_i^*) < B^c}$$

π_i^* è un cammino corto e utile!

IMPOSSIBILE $\square$

Teorema 1: $$\sum_{a \in A} \bar{\ell}(a) \leq B^{c+1} \underbrace{|I_s|} + m$$

dove I_s è l'insieme dei cammini aggiunti nella prima fase

Dim: All'inizio:

$$\sum_{a \in A} \ell(a) = m$$

Cosa succede quando aggiungo un nuovo cammino contro π $l \to l'$

$$l'(a) = \begin{cases} l(a) & \text{se } a \notin \pi \\ \beta l(a) & \text{se } a \in \pi \end{cases}$$

Calcoliamo:

$$\sum_{a\in A} l'(a) - \sum_{a \in A} l(a) =$$

$$= \sum_{a\in\pi} \left(\beta l(a) - l(a)\right) + \underbrace{\sum_{a\notin\pi} (l(a) - l(a))}_{0} =$$

$$= \sum_{a\in\pi} (\beta - 1) l(a) =$$

$$= (\beta - 1) \sum_{a\in\pi} l(a) = (\beta - 1) l(\pi) <$$

$$< (\beta - 1)\beta^c < \underbrace{\beta^{c+1}}$$ $\square$

Osservazioni:

1) $$\sum_{i \in I^* \setminus I} \bar{l}(\pi_i^*) \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \beta^c |I^* \setminus I|$$

2) $$\sum_{i \in I^* \setminus I} \bar{\ell}(\pi_i^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nessun arco è usato da questi cammini più di } c \text{ volte}}}{\le} c \underbrace{\sum_{a \in A} \bar{\ell}(a)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 1}}}{\le}$$

$$\le c\left(\beta^{c+1} |I_s| + m\right)$$

$$\beta^c |I^*| \le \beta^c |I^* \setminus I| + \beta^c |I^* \cap I|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Oss 1}}}{\le} \sum_{i \in I^* \setminus I} \bar{\ell}(\pi_i^*) + \beta^c |I|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Oss 2}}}{\le} c\left(\beta^{c+1} |I_s| + m\right) + \beta^c |I|$$

$$\le c\left(\beta^{c+1} |I| + m\right) + \beta^c |I|$$

Divido per β^c entrambi i membri

$$|I^*| \le c\beta |I| + c\beta^{-c} m + |I|$$

$$\le c\left(\beta |I| + \beta^{-c} m\right) + |I|$$

$|I| \geq 1$

$$\leq c\left(\beta + \beta^{-c} m\right)|I| + |I|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{|I^*|}{|I|} \leq c\left(\beta + \beta^{-c} m\right) + 1}$$

$$\beta \triangleq m^{\frac{1}{c+1}}$$

$$\frac{|I^*|}{|I|} \leq c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{-\frac{c}{c+1}} m\right) + 1$$

$$= c\left(m^{\frac{1}{c+1}} + m^{\frac{c+1-c}{c+1}}\right) + 1$$

$$= 2c\, m^{\frac{1}{c+1}} + 1$$

Teorema: L'algoritmo PricingCongestedPath con input $B = m^{\frac{1}{c+1}}$ da' una $\left(2c\, m^{\frac{1}{c+1}} + 1\right)$-appross.

c	
1	$2\sqrt{m} + 1$
2	$4\sqrt[3]{m} + 1$
3	$6\sqrt[4]{m} + 1$
...	...

$$k \gg 2\sqrt{m} + 1$$