VERTEX COVER REVISITED

LINEAR PROGRAMMING (LP)

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$

AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Q}^n$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

FUNZIONE OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$

TIPO: MIN

$LP \in PO$ [Karmarkar, 1981]

INTEGER LINEAR PROGRAMMING (ILP)

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$

AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

FUNZIONE OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$

TIPO: MIN

$ILP \in NPO$-completo

VERTEX COVER COME ILP

$G=(V,E)$ $\langle w_i \rangle_{i\in V}$

$$\Pi \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_i \in \{0,1\} & i \in V \\ \begin{cases} x_i + x_j \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \\ x_i \geq 0 & \forall i \in V \\ x_i \leq 1 & \forall i \in V \end{cases} & \\ \min \sum_{i\in V} w_i x_i & \end{array}} \in ILP$$

$$\tilde{\Pi} \in LP$$

Teorema: Se Π e un problema ILP (di min) e $\tilde{\Pi}$ è la sua versione rilassata

$$w^* \geq \tilde{w}^*$$

Sia $\tilde{x}^*$ l'ottimo del problema rilassato e sia Ω il vettore

$\{1$ se $\tilde{x}_i^* \geq \frac{1}{2}$

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 1: $\bar{x}$ rappresenta un vertex cover

Dim: P.a. supponete $\{i,j\} \in E$

$$\bar{x}_i = \bar{x}_j = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_i^* < \frac{1}{2} \quad e \quad x_j^* < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_i^* + x_j^* < 1$$

IMPOSSIBILE. $\square$

Osservazione 2: $\forall i \in V \quad \bar{x}_i \le 2\tilde{x}_i^*$

Lemma: $\sum_{i \in V} w_i \bar{x}_i \le 2W^*$.

Dim:

$$\sum_{i \in V} w_i \bar{x}_i \underset{\text{Oss. 2}}{\le} 2 \underbrace{\sum_{i \in V} w_i \tilde{x}_i^*} = 2\tilde{w}^*$$

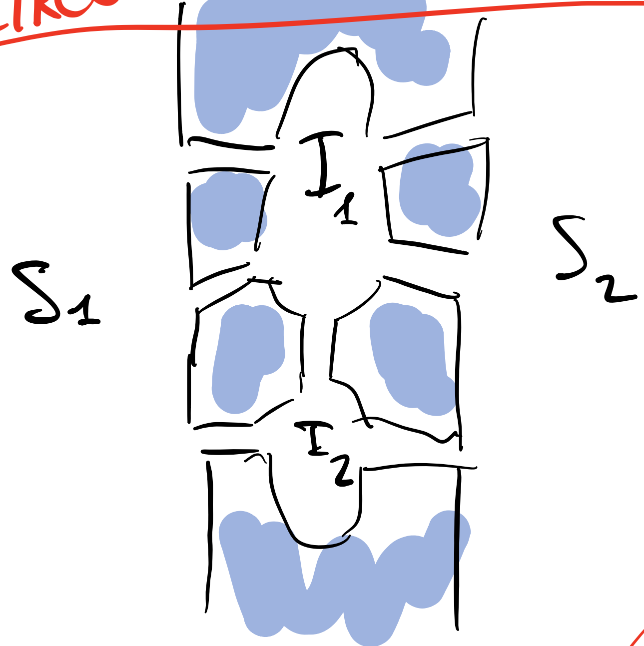
$$\le 2W^*. \quad \square$$

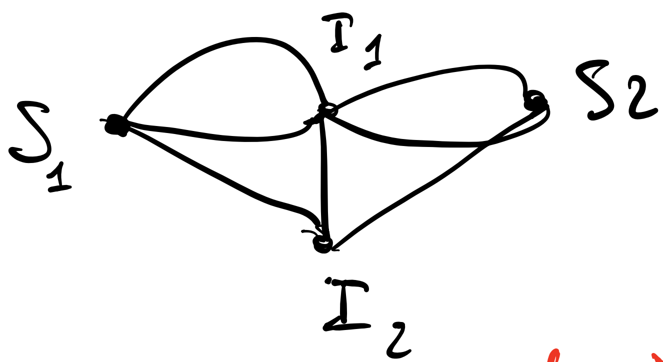
Teorema

Teorema: Σ è una soluzione 2-approssimata di VERTEX COVER.

ALGORITMO DI CHRISTOFIDES PER IL TSP METRICO

CIRCUITI EULERIANI

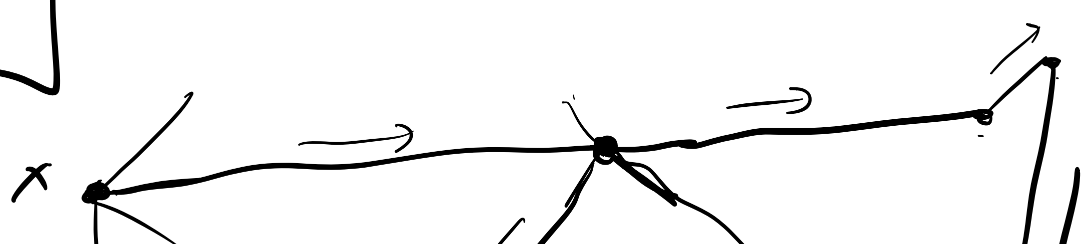


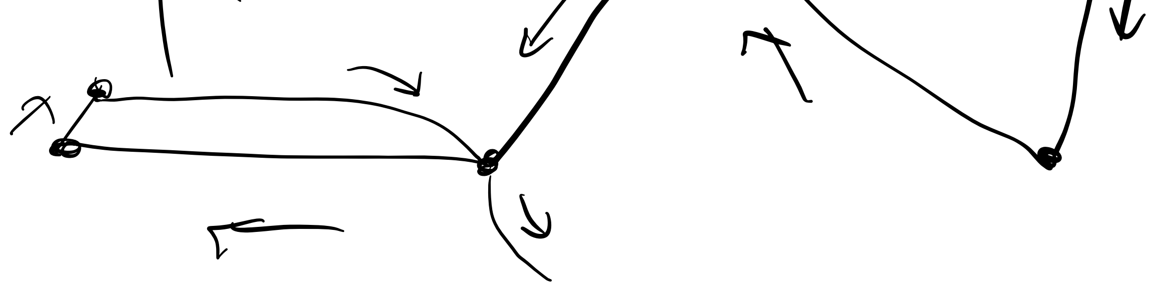


circuito (cammino da x a x) che passa esattamente una volta per ogni lato

<u>Teorema</u>: Un (multi)grafo ammette un circuito euleriano <u>sse</u> è connesso e tutti i suoi vertici hanno grado pari.

$\boxed{\Leftarrow}$





HANDSHAKING LEMMA

Lemma: In ogni grafo non orientato il numero di vertici di grado dispari è pari.

Dim:

$$\underbrace{\sum_{x \in V} d(x)} = \underbrace{2m}$$

$\square$

PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE (TSP)

INPUT: $G = (V, E)$ grafo non orientato

$$\langle \delta_e \rangle_{e \in E} \in \mathbb{Q}^+$$

SOLUZIONE AMMISSIBILE: circuito hamiltoniano π in G cioè un circuito che tocchi tutti i vertici esattamente una volta, oppure $\perp$

FUNZ. OBIETTIVO:
$$\delta = \sum_{e \in \pi} \delta_e$$

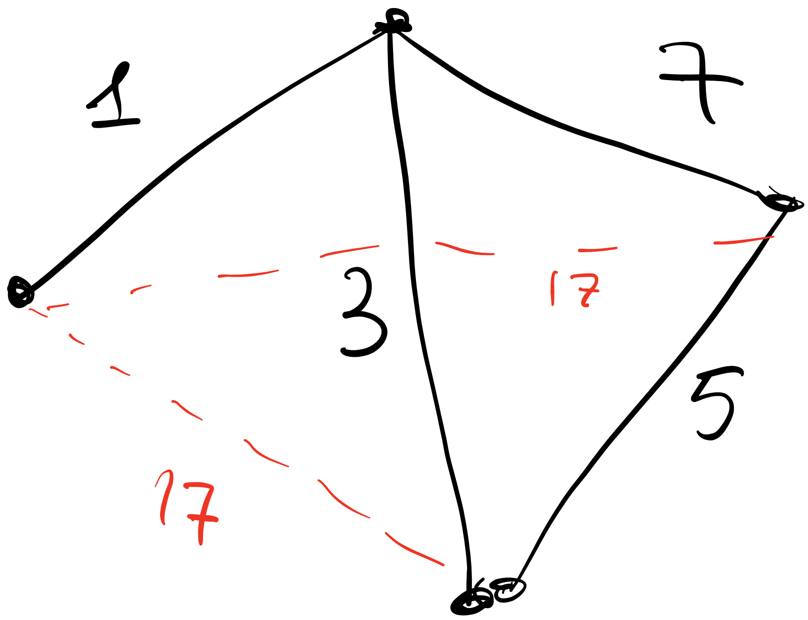
TIPO: MIN

$\boxed{\text{TSP METRICO}}$

1) G è una clique
2) δ_e è una metrica, cioè $\forall x, y, z$

$$\delta_{\{x,y\}} + \delta_{\{y,z\}} \geq \delta_{\{x,z\}}$$

$M = \sum_{e \in E} d_e + 1$



<u>Teorema</u>: TSP METRICO $\in$ NPOcompl

INGREDIENTI

1) <u>MINIMUM SPANNING TREE</u> $\in$ PO

Tree = grafo connesso aciclico

Spanning tree = scelta di lati che è un albero e tocca tutti i vertici

2) <u>MINIMUM-WEIGHT PERFECT MATCHING $\in$ PO</u>

Grafo con lati pesati e con un numero pari di vertici:
Volete un perfect matching di costo minimo.

ALGORITMO DI CHRISTOFIDES PER IL TSP METRICO

<u>INPUT</u>: $G = (V, E = \binom{V}{2})$
$\langle \delta_e \rangle_{e \in E}$ metrico

1) Trovo un MST T
2) Sia D l'insieme di vertici di grado dispari in T.
$\Rightarrow$ (Handsh. Lemma) $|D|$ è pari
3) Sia M un minimum-weight perfect matching su D.

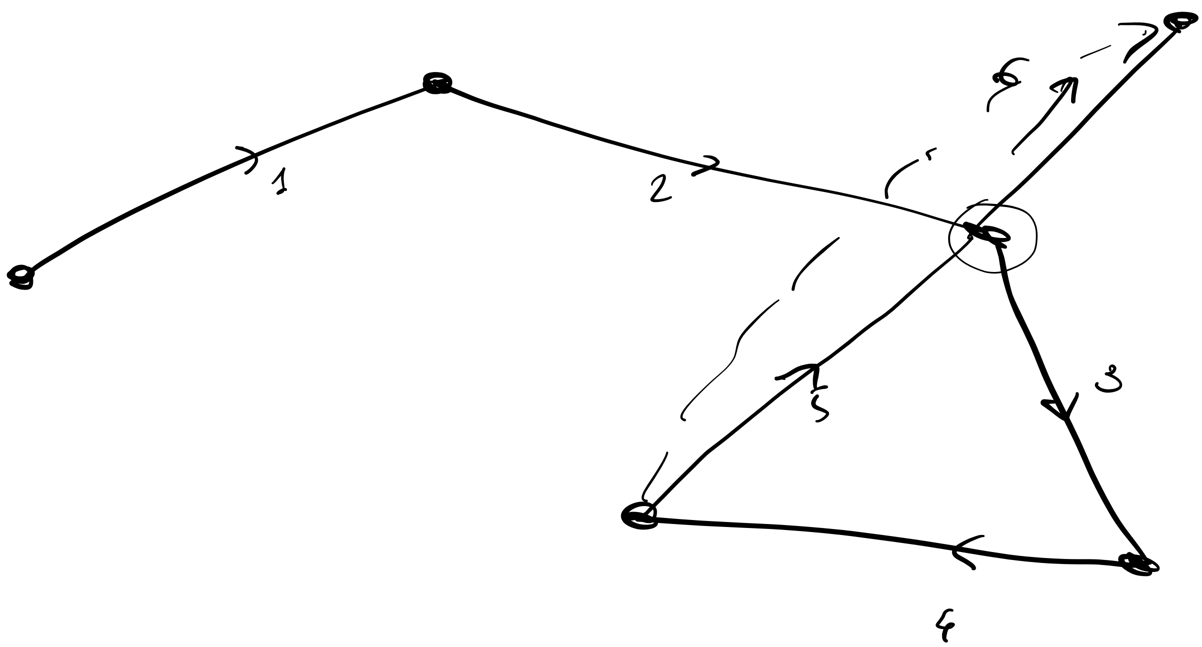
4) Considerate il multigrafo

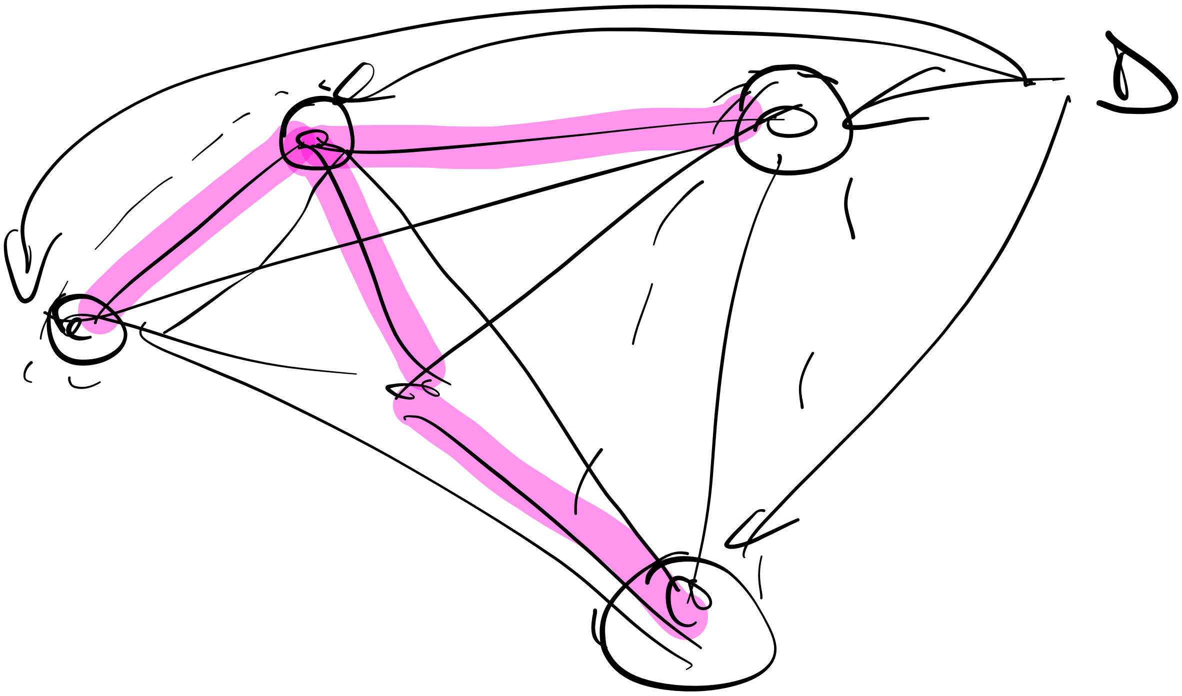
MUT

$\Rightarrow$ Tutti i vertici hanno grado pari

$\Rightarrow$ Esiste un circuito euleriano $\tilde{\pi}$

5) Shorcircuit $\tilde{\pi} \rightarrow \pi$




D