

$$|\beta| = (cm)^{\frac{1}{c+1}}$$

$$\frac{|I^*|}{|I|} \leq c \left(\beta + \beta^{-c} m \right) + 1 =$$

$$= c \left((cm)^{\frac{1}{c+1}} + (cm)^{-\frac{c}{c+1}} m \right) + 1 =$$

$$= c \left(c^{\frac{1}{c+1}} m^{\frac{1}{c+1}} + c^{-\frac{c}{c+1}} m^{\frac{1}{c+1}} \right) + 1 =$$

$$= c \left(c^{\frac{1}{c+1}} + c^{-\frac{c}{c+1}} \right) \sqrt[c+1]{m} + 1$$

$$\left(1^{\frac{1}{2}} + 1^{-\frac{1}{2}} \right)$$

PROBLEMA

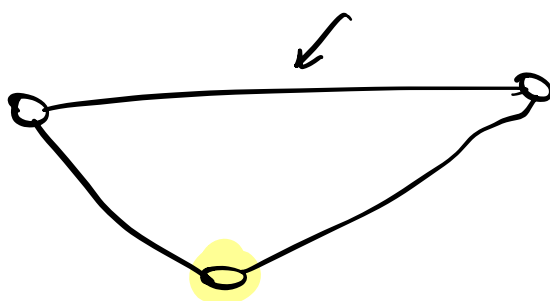
VERTEX COVER

INPUT : $G = (V, E)$ non oriented
 $(w_i)_{i \in V} \in \mathbb{Q}^+$

SOL. ACCETTABILE : $X \subseteq V$
 $\forall e \in E \quad e \cap X \neq \emptyset$
 t.c.

COSTO: $W = \sum_{i \in X} w_i$

TIPO: MIN



DOMINATING
 SET MA
 NON VERTEX
 COVER

VERTEX COVER

VIA

SET COVER

$\widehat{\text{VERTEX COVER}} \leq_p \widehat{\text{SET COVER}}$

$G = (V, E)$

$w_i \in \mathbb{Q}^+ \quad (i \in V)$

$\Downarrow$

$S_1, S_2, \dots, S_k$

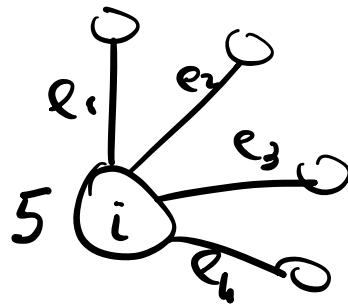
$\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_k$

$U = \bigcup_{i=1}^d S_i$

Un insieme S_i per ogni vertice $i \in V$

$S_i = \{e \mid e \text{ è un lb che incide su } i\}$

$$\bar{w}_i = w_i$$



$$\Rightarrow S_i = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\bar{w}_i = 5$$

$$I \subseteq V \text{ t.c. } \bigcup_{i \in I} S_i = E$$

$$\Leftrightarrow \forall e \in E \quad \exists i \in I \text{ t.c. } e \text{ incide su } i$$

$\Leftrightarrow I$ è un vertex cover

Teorema: VERTEX COVER è

$H(d_{\max})$ - 2 approssimabile

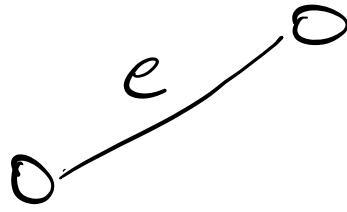
$\downarrow$

MAXIMUM DEGREE

Vertex Cover

VIA

PRICING



$$\langle p_e \rangle \in \mathbb{Q}^+ \quad e \in E$$

p_e è il prezzo
che e è disposto
a pagare per
essere coperto

Def: Una prettatura $\langle p_e \rangle_{e \in E}$ è
equa se $\forall i \in V$

$$\sum_{e \text{ incidente su } i} p_e \leq w_i$$

L'algoritmo passa da una
prettatura equa all'altra.

Def: Una prezzatura equa
soddisfa $i \in V$

$$\langle p_e \rangle_{e \in E}$$

sse

$$\sum_{e \text{ incide su } i} p_e = w_i$$

Lemma 1: Se $\langle p_e \rangle$ è
 una prezzatura equa
 allora

$$\sum_{e \in E} p_e \leq w^*$$

Dich: $\forall i \in V$

$$\sum_{e \text{ incidente su } i} p_e \leq w_i.$$

V^*

Sommiando su i

$$\sum_{e \in E} p_e \leq \underbrace{\sum_{i \in X^*} \sum_{\substack{e \text{ incidente} \\ \text{su } i}} p_e}_{\text{componiamo tutti i } p_e} \leq \sum_{i \in X^*} w_i = w^*$$

componiamo
tutti i
 p_e

□

ALGORITMO

PRICING VERTEX COVER

INPUT: $G=(V,E)$, $\langle w_i \rangle_{i \in V}$
 $\forall e \in E$

• $p_e \leftarrow 0$

• forever

• $\exists e \in \{i,j\}$ t.c. $\langle p_e \rangle$ non
soddisfa né i né j ?

• se $\exists$ break

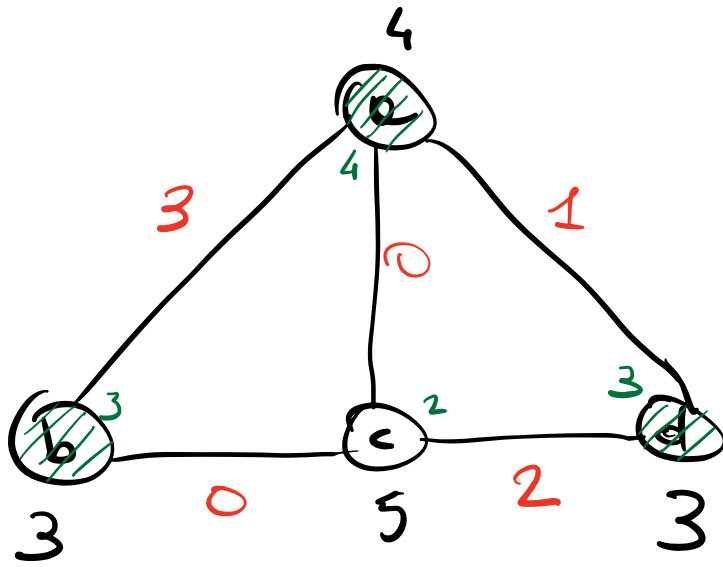
• sia $\bar{e} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ un tale
lato

$$\Delta \leftarrow \min \left(w_{\bar{i}} - \sum_{\substack{e \text{ inc.} \\ \text{su } \bar{i}}} p_e, w_{\bar{j}} - \sum_{\substack{e \text{ inc.} \\ \text{su } \bar{j}}} p_e \right)$$

• $p_{\bar{e}} \leftarrow p_{\bar{e}} + \Delta$

• $X = \{i \mid \langle p_e \rangle \text{ soddisfa } i\}$

• OUTPUT X



$$X = \{a, b, d\}$$

$$w = 10$$

$$\bar{e} = \{a, b\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3-0 \\ 4-0 \end{array} \right\} \Delta = 3$$

$$\bar{e} = \{a, d\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4-3 \\ 3-0 \end{array} \right\} \Delta = 1$$

$$\bar{e} = \{c, d\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5-0 \\ 3-1 \end{array} \right\} \Delta = 2$$

Lemma 2: Alla fine dell'esecuzione

$$w \leq 2 \sum_{e \in E} p_e$$

Dim:

$$w = \sum_{i \in X} w_i = \sum_{i \in X} \left(\sum_{\substack{e \text{ incide} \\ \text{sui } i}} p_e \right) \leq 2 \sum_{e \in E} p_e$$

ogni lato
coperto 2

□

Allora: ^{massimo due volte} PRINCIPAL Vertex Cover è una
 2-approximatione di
 VERTEX COVER

Dim:

$$\frac{W}{W^*} \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \text{Lemma 2}}}{\leq} \frac{2 \sum_{e \in E} P_e}{W^*} \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \text{Lemma 1}}}{\leq} \frac{2 \sum_e P_e}{\sum_e P_e} = 2 \quad \square$$

- NOTA**
- VERTEX COVER non ammette PTAS
 - Non sono noti alg. polinomiali < 2 che danno appross.

VERTEX COVER

MEDIANTE

RLA SANTIAGO

PROBLEMA LINEAR PROGRAMMING (LP)

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$

SOL. AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Q}^n$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$

TIPO: MIN

- Il metodo del simplesso (Dantzig)
- Metodi del punto interno
- Karmarkar (1981)

$$LP \in PO$$

PROBLEMA INTERLINEAR PROGRAMMING (ILP)

INPUT: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{Q}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{Q}^n$
SOL. AMMISSIBILI: $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$
 $A\underline{x} \geq \underline{b}$
FUNZ. OBIETTIVO: $\underline{c}^T \underline{x}$
TIPO: MIN

Thm: $ILP \in NPO_c$

Dim: $\text{VertexCover} \leq_P \hat{ILP}$

• $G = (V, E)$, $\langle w_i \rangle_{i \in V} \in \mathbb{Q}^+$

$k \in \mathbb{Q}^+$

Esiste un vertex cover
di G con costo $\leq k$?

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in V$$

VINCOLI

$$\begin{cases} x_i + x_j \geq 1 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \leq 1 \end{cases}$$

$$\forall \{i, j\} \in E$$

$$\forall i \in V$$

$$\forall i \in V$$

OBIETTIVO

min

$$\sum_{i \in V} w_i x_i$$

$$\leq R$$

