Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Informatica

Dottorato di Ricerca in Informatica
VIII Ciclo

Tesi di Dottorato

Misurazione e Approssimazione di Strutture Infinite Mediante Spazi di Tolleranza

Paolo Boldi

Relatori:

Felice Cardone, Nicoletta Sabadini (Dip. di Scienze dell'Informazione, Università di Milano)

Manfred Droste (Fachrichtung Mathematik, Universität Dresden, Germania)

Paolo Boldi
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università degli Studi di Milano
Via Comelico 39
I-20135 Milano — Italy

boldi@dsi.unimi.it

Indice

Capitolo 1

Prefazione

1.1 Struttura della Tesi

Per comodità del lettore, iniziamo con uno schema generale del contenuto di questa tesi.

Nel Capitolo 2, motiviamo la nozione di spazio di tolleranza usando alcuni esempi presi dalla teoria della computazione, della misurazione, della progettazione di circuiti asincroni e dalla teoria relativistica del tempo (con applicazioni alla teoria della concorrenza).

Dopo aver introdotto alcune definizioni e teoremi di teoria dei domini (Capitolo 3), discutiamo in modo dettagliato il ruolo degli spazi di tolleranza (e di alcune loro generalizzazioni) per ottenere risultati in teoria dei domini, con applicazioni alla costruzione di domini universali e alla soluzione di equazioni ricorsive di dominio (Capitolo 4). In questo contesto, presentiamo alcune generalizzazioni del teorema di Rado sull'esistenza di uno spazio di tolleranza universale (Sezione 4.3), e diamo, nella Sezione 4.4, alcune indicazioni su come queste costruzioni diano direttamente la possibilità di risolvere equazioni ricorsive di dominio mediante opportune codifiche di tipo numerico. Consideriamo anche due costruzioni universali alternative, una basata sugli automi di tracce e le strutture di eventi prime (Sezione 4.5), e una di tipo probabilistico (Sezione 4.6).

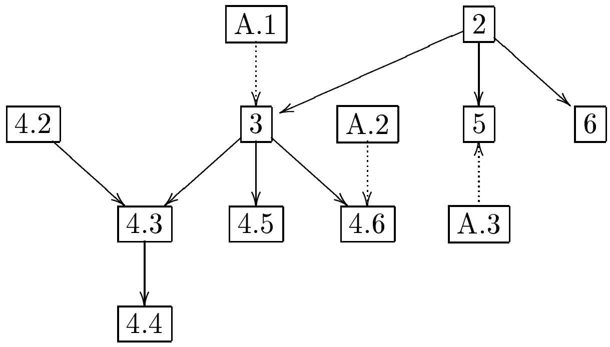
Nel Capitolo 5, mostriamo come si possa aggiungere ad uno spazio di tolleranza una struttura topologica, e usiamo questo fatto per ottenere approssimazioni finitarie di spazi topologici complessi.

Infine, il Capitolo 6 prende in considerazione in modo dettagliato quegli spazi di tolleranza che si possono utilizzare per rappresentare i risultati di misurazioni, concentrandosi su quelli associati a semiordini fortemente noetheriani, e ottenendo alcune semplici caratterizzazioni di proprietà della relazione di tolleranza in termini della struttura delle catene ed anticatene massimali del semiordine associato.

Nell'Appendice, richiamiamo alcune nozioni fondamentali di teoria delle categorie, teoria della misura e topologia generale che il lettore dovrebbe possedere al fine di comprendere i contenuti di questa tesi.

La maggior parte dei risultati presentati nel Capitolo 3 sono standard, ad eccezione di alcuni che sono stati pubblicati in [BCS93]. Il materiale del Capitolo 4 è in gran parte nuovo, tranne la Sezione 4.5, che è apparsa in [BCS93]. Alcuni dei risultati presentati nel Capitolo 5 facevano parte di [Bol95]. Il Capitolo 6 è stato pubblicato quasi per intero in [Bol96].

Questo è il diagramma di precedenza della tesi.



1.2 Notazioni, convenzioni e terminologia

Nel seguito faremo uso di alcune notazioni e convenzioni usuali. Ecco una tabella di alcune delle notazioni meno comuni; altre saranno introdotte nell'Appendice.

Notazione	Significato
A^C	il complemento di A
$A \setminus B$	A meno B (differenza insiemistica)
$\prod_{i \in I} A_i$	il prodotto cartesiano della famiglia A_i
$\wp(A)$	insieme delle parti di A (cioè, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A)
$\wp_{\mathrm{fin}}(A)$	l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di A
$f \circ g$	composizione funzionale di $g : A \to B$ e $f : B \to C$
$x\,R\,y$	la coppia (x, y) appartiene alla relazione R (cioè, $(x, y) \in R$)
$R \circ T$	la composizione di due relazioni $R \subseteq A \times B$ e $T \subseteq B \times C$
$\phi \iff \psi$, ϕ iff ψ	ϕ se e solo se ψ
$\phi \wedge \psi$ ($\phi \vee \psi$, $\neg\phi$)	ϕ e ψ (ϕ o ψ, non ϕ)
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, razionali, reali, risp.
ω	l'insieme dei numeri naturali; il primo ordinale infinito

Al fine di non disorientare il lettore, è opportuna fin d'ora una considerazione riguardante la terminologia adottata in questa tesi. Nel seguito, saremo principalmente interessati agli spazi di tolleranza, e alle loro applicazioni alla teoria dei domini, alla teoria dell'approssimazione e della misurazione. In effetti, da un punto di vista definizionale, uno spazio di tolleranza non è altro che un grafo riflessivo (eventualmente infinito), e avremmo potuto scegliere di usare la comune terminologia di teoria dei grafi per parlare delle sue proprietà. Ciò nonostante, riteniamo che l'idea di spazio di tolleranza abbia uno specifico significato che andrebbe sempre enfatizzato in quanto tale, se non altro per il modo in cui la relazione di adiacenza (tolleranza) viene indotta.

Per questa ragione, abbiamo deciso di adottare una nomenclatura specifica di teoria della tolleranza, e di aderire a questo principio generale in tutta la tesi, con poche eccezioni. Per le stesse ragioni, abbiamo deciso di usare una terminologia di teoria dei domini che sia adeguata alle nostre esigenze, scegliendo di scartare alcune delle possibili alternative (anche se, a volte, erano largamente diffuse).

Forniamo in questa sede un breve elenco dei possibili nomi alternativi che il lettore può trovare in letteratura, che saranno comunque sempre menzionati nel testo ogni volta che un nuovo concetto sarà introdotto.

Nome utilizzato qui	Possibili alternative
spazio di tolleranza [Zee62]	grafo (non orientato)
funzione continua (rispetto alla tolleranza)	morfismo di grafi
immersione (di spazi di tolleranza)	immersione di grafi
catena di indifferenza	cammino in un grafo
dominio dI coerente atomico	spazio di coerenza [Gir87]
dominio dI atomico	dominio qualitativo [Gir86]
linea (taglio) [Pet96]	(anti)catena massimale

1.3 Ringraziamenti

Non ci sono parole per esprimere la gratitudine che devo a tutti coloro i quali, in un modo o nell'altro, mi hanno aiutato nella scrittura di questa tesi. Il mio primo e più grande "grazie" va a Felice Cardone, che mi ha costantemente aiutato fin dalla laurea, ed ha seguito la mia attività di ricerca con ardore, zelo e competenza. Nicoletta Sabadini ha sostenuto il mio lavoro con pazienza e fiducia. Manfred Droste ha svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo di molte idee e risultati, e mi ha dato consigli di grande utilità, di natura sia tecnica che motivazionale.

Molte altre persone hanno dato il loro contributo alla produzione di questa tesi, con commenti, consigli e discussioni: fra esse, vorrei ringraziare Sebastiano Vigna (che mi ha aiutato per la parte categoriale, e che ha letto alcune delle bozze) e C.A. Petri (che ha dato commenti utili su una versione preliminare del mio articolo [Bol96]).

Ma, soprattutto, vorrei dedicare questa tesi ai miei genitori: il loro aiuto costante, i preziosi consigli, e la loro presenza silenziosa ma continua hanno contribuito a questo lavoro, e alla mia vita, in un modo che le parole possono spiegare solo a fatica.

Capitolo 2

Introduzione: tolleranza ed approssimazione

La concorrenza è un fenomeno computazionale fondamentale che si verifica nei sistemi distribuiti nello spazio in cui la comunicazione fra le componenti comporti tempi non trascurabili[1]. Il suo studio ha ottenuto maggior impeto dall'osservazione che i *processi* di tali sistemi possono essere analizzati come insiemi di *eventi* (o, meglio, occorrenze di eventi) con una relazione di ordine su di essi che riflette l'ordine in cui tali eventi possono venire abilitati in un'esecuzione del sistema[2]. Due eventi sono concorrenti esattamente quando sono inconfrontabili in questo ordinamento, il che significa in particolare che nessuno dei due viene abilitato dall'altro (i primi esempi di questo approccio possono essere trovati in Holt et al. [H$^+$68] ed in Patil [Pat70]).

In effetti, l'origine di quest'idea fondamentale può essere fatta risalire al lavoro di Carl Adam Petri [Pet62, Pet82a, Pet77] che in seguito (si veda per esempio [Pet79, Pet80a, Pet82b, Pet87, PS87]) sviluppò una *teoria assiomatica della concorrenza* ispirata dalle prime assiomatizzazioni della fisica relativistica (come riassunto, per esempio, in Carnap [Car58]). L'ambito naturale per studiare la relazione di concorrenza è una struttura

$$(X, \mathrm{co}) \tag{2.1}$$

per un insieme arbitrario $X \neq \emptyset$ con una relazione binaria riflessiva e simmetrica co su X. Questo è ciò che nel presente lavoro verrà chiamato *spazio di tolleranza*, e co sarà chiamata *relazione di tolleranza*, seguendo la terminologia introdotta da Zeeman [Zee62].

Naturalmente, questo sviluppo assiomatico favorisce il confronto di proprietà della concorrenza con quelle di strutture formalmente simili che compaiono in altre aree apparentemente lontane. Commenteremo ora brevemente alcune di queste connessioni e daremo i riferimenti alla letteratura relativa, rinviando alle sezioni successive uno studio più approfondito di alcune di esse.

Petri stesso (in Petri [Pet80a]) osservò esplicitamente lo stretto legame fra gli assiomi per strutture della forma (2.1) e le proprietà della relazione di *indifferenza* che compare

[1] Questa è la definizione di sistema distribuito data, per esempio, da Lamport [Lam78]. Si noti che ogni sistema è distribuito in questo senso, se lo si considera abbastanza da vicino.

[2] Questo è di solito chiamato *ordine causale* in letteratura, sebbene rappresenti lo stesso tipo di relazione che esiste fra alzare il cane di una pistola e premerne il grilletto, che non può certo essere ragionevolmente considerato come un rapporto di causa-effetto.

nella misurazione ordinale in teoria dell'utilità. Questo si può estendere ad un'interpretazione in cui X sia un insieme di campioni da misurare mediante qualche macchina M. In quel caso $x \operatorname{co} y$ se x e y sono *indistinguibili* mediante M. Fu Luce [Luc56], sulla base di precedenti lavori di economia [Arm39] e filosofia [Goo77], a sostenere la tesi che l'indifferenza dovrebbe essere considerata come relazione di tolleranza, formalizzata come inconfrontabilità in ordini parziali di una certa classe opportuna. Questi sono i cosiddetti *semiordini* che, in virtù dei risultati di Scott e Suppes [SS58], si possono rappresentare come gli ordinamenti che compaiono quando lo strumento di misura emetta per ogni campione un valore reale con un grado di precisione limitato da una soglia che dipende solo dallo strumento[3].

Relazioni intransitive di similarità compaiono in modo del tutto naturale nell'analisi di quelli che Poincaré [Poi03] chiamava i *continui empirici.* In effetti, l'esistenza di soglie sensoriali (o di limitazioni fisiche degli strumenti di misurazione) suggerisce che le proprietà di densità degli ordinamenti che derivano dalla classificazione dei dati basata sulla percezione vengano rimpiazzate da una relazione di questo tipo[4]. Poincaré trasse come principale conseguenza di queste limitazioni una definizione, che è anche considerata una proprietà fondamentale da Petri in [Pet80a]:

> On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer per les relations suivantes:
>
> $$A = B, B = C, A < C$$
>
> qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique. [...] Un système d'éléments formera un *continu*, si l'on peut passer d'un quelconque d'entre eux à un autre également quelconque, par une série d'éléments consécutifs tels que chacun d'eux ne puisse se discerner du précédent. Cette *série linéaire* est à la *ligne* du matématicien ce qu'un *élément* isolé était au point. (*ibidem*, pagg. 34–35 e 45; traduzione inglese pagg. 22 e 31)

Questa linea di pensiero è stata in seguito proseguita da Zeeman [Zee62, ZB70], con motivazioni legate alle applicazioni in biologia e fisica, e da Poston [Pos71], che ricostruì una parte sostanziale dei risultati della matematica superiore sostituendo nozioni topologiche con i loro analoghi finitisti nel contesto degli spazio di tolleranza del tipo (2.1).

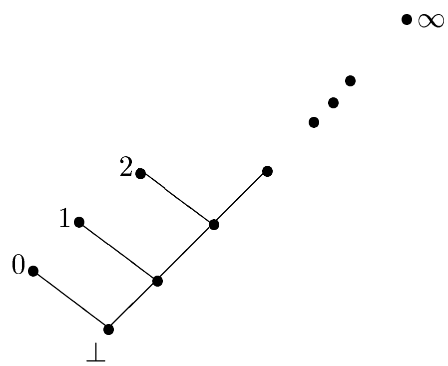
Una ulteriore connessione compare quando si consideri come X la collezione degli insiemi convessi (intervalli) di un insieme ordinato; in questo caso co si può interpretare come sovrapposizione di intervalli, e ulteriori assiomi possono essere imposti a seconda delle proprietà topologiche e d'ordine del soggiacente insieme parzialmente ordinato. Quest'interpretazione ha avuto origine con il metodo di "astrazione estensiva" di Whitehead

[3]Nel Capitolo 6 della presente tesi, analizzeremo una classe speciale di semiordini che risulta di interesse sia in teoria della misurazione che nella teoria dei sistemi concorrenti.

[4]È opportuno osservare che le limitazioni in questo caso hanno un effetto positivo che risulta evidente quando si comprenda che l'esistenza stessa di una pratica di misurazione nella vita di tutti i giorni dipende strettamente dal fatto che, per esempio, l'equivalenza fra pesi è una relazione di tolleranza e non di equivalenza — altrimenti dovremmo essere in grado di comunicare numeri reali con precisione infinita.

(si veda Wiener [Wie14, Wie16] per alcune applicazioni pionieristiche), ed è particolarmente rilevante in quella che è oggi nota come "topologia senza punti", in cui i punti di uno spazio topologico non sono entità primitive, ma piuttosto vengono ricostruiti come collezioni di aperti opportune. Da un lato, quest'ottica tiene conto del fatto che l'infinita precisione nella misurazione necessaria per individuare un punto può essere ottenuta solo al limite. In tale approccio, ad esempio, i punti vengono identificati come insiemi massimali di elementi a due a due sovrapposti di X, come nella teoria sviluppata da Wallman e riassunta in Menger [Men40]. D'altro canto, ci si è recentemente accorti che un'applicazione uniforme di questo modo di vedere permette di dimostrare costruttivamente risultati che classicamente richiedono qualche forma dell'assioma della scelta (per un esempio, si veda Coquand [Coq91, Coq92]).

Dal punto di vista logico, gli elementi di X ponnono essere considerati proposizioni atomiche, e co descrive una relazione di compatibilità o consistenza fra proposizioni. È naturale in questo contesto prendere insiemi di proposizioni a due a due compatibili come elementi (parziali) di qualche tipo di dominio di Scott[5]. L'idea è dovuta a Girard, Lafont e Taylor [GLT89]. Per esempio, il dominio dei "numeri naturali lazy" che è d'interesse per la semantica denotazionale dei linguaggi di programmazione funzionali e il cui diagramma di Hasse ha la forma:



si può facilmente descrivere come l'insieme delle proposizioni

$$X = \{\boldsymbol{n} \mid n \in \omega\} \cup \{\boldsymbol{n}^+ \mid n \in \omega\}$$

con consistenza data dalla chiusura simmetrica dell'insieme di coppie:

- $\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle$ per $m = n$,
- $\langle \boldsymbol{m}^+, \boldsymbol{n} \rangle$ se e solo se $m < n$,
- $\langle \boldsymbol{m}^+, \boldsymbol{n}^+ \rangle$ per ogni m, n.

È dunque possibile, anche in questo caso, mettere porre in relazione l'idea di spazio di tolleranza con quella di elementi parziali che approssimano un elemento totale, che sta dietro a gran parte del lavoro di Scott in teoria dei domini (si veda specialmente Scott

[5] Questa interpretazione verrà esplorata a fondo nei Capitoli 3 e 4 di questa tesi.

[Sco70]). Questo è un altro modo di mettere in relazione i domini e la concorrenza, alternativo a quello che ha motivato l'introduzione delle strutture di eventi e le relative classi di ordini parziali (Nielsen, Plotkin e Winskel [NPW81], Winskel [Win80]).

2.1 Approssimazione ed equivalenza: un approccio computazionale

La necessità dell'approssimazione è di solito determinata dall'impossibilità (o dalla difficoltà) di raggiungere (stabilire) un'equivalenza fra oggetti. Per esempio, nella pratica della misurazione, diremo che una certa barra di metallo è lunga *approssimativamente* 1 metro per intendere che o non abbiamo modo di decidere se la sua lunghezza sia *esattamente* 1 metro (poiché gli strumenti di misurazione a nostra disposizione non sono abbastanza precisi per dare dei giudizi non approssimati), oppure che in ogni caso una misurazione esatta sarebbe troppo costosa, o addirittura inutile, nel contesto considerato.

L'impossibilità di raggiungere l'equivalenza è talvolta determinata da qualche limitazione nella disponibilità delle risorse, ma altre volte è intrinseca nel problema che si sta considerando. In questa sezione, inizieremo presentando alcuni problemi computazionali in cui queste situazioni si verificano, e mostreremo come le difficoltà che si verificano possono essere ben spiegate nel contesto della teoria dell'osservazione.

Descriveremo per iniziare un semplice *Gedankenexperiment* che fornisce un esempio di una situazione in cui giudizi esatti relativi ad una relazione di equivalenza richiederebbero uno sforzo (in questo caso, sforzo computazionale) illimitato.

Si consideri un insieme $A \subseteq \omega$ di numeri naturali; chiaramente questo insieme induce una relazione di equivalenza su ω definita da

$$x \sim y \text{ se e solo se } (x \in A \iff y \in A).$$

In altre parole, due numeri sono equivalenti se e solo se sono o entrambi contenuti in A, o entrambi contenuti nel suo complemento. Questa relazione di equivalenza ha esattamente due classi di equivalenza, A e A^C (il complemento di A). Naturalmente c'è una relazione diretta fra la decidibilità di A e quella di $\sim$: più precisamente, $\sim$ sarà decidibile se e solo se A è ricorsivo.

Infatti, si supponga che A sia ricorsivo, e sia M un accettore di Turing deterministico che decide il problema di appartenenza ad A; in altre parole, M è una macchina di Turing che termina su ogni input in uno di due possibili stati SI oppure NO, e $M(x) = \text{SI}$ se e solo se $x \in A$. Ora, per decidere se $x \sim y$ oppure no si faccia girare M su x e y, e si risponda "SI" se e solo se M dà la stessa risposta su entrambi gli input (cioè, $M(x) = M(y)$).

Il problema è che qui, in generale, non sappiamo in anticipo quanto tempo sarà necessario alla macchina M per dare una risposta: sappiamo solo che la macchina prima o poi terminerà la computazione, ma il numero di passi in generale è illimitato. Si supponga che si debba prendere qualche decisione (eventualmente di tipo approssimato) entro un numero fisso t di passi, usando la macchina M. Come dovremmo comportarci? Potremmo far funzionare la macchina M, sperando che si fermi sul dato input *entro* t passi: se siamo abbastanza fortunati, la macchina si fermerà entro il tempo prefissato, e otterremo la risposta che cercavamo. Ma cosa dovremmo fare se la computazione non fosse ancora

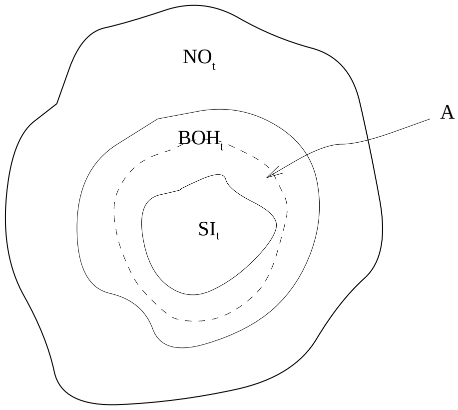


Figura 2.1: Partizione indotta da M_t

terminata dopo il t-esimo passo? La sola cosa ragionevole da fare è emettere in output una risposta che significa "non so", esprimendo il fatto che M non è stata in grado di calcolare la risposta per il problema entro i termini prefissati.

In altre parole, costruiamo una nuova macchina M_t che opera come segue:

$$M_t(x) = \begin{cases} M(x) & \text{se } M \text{ si ferma entro } t \text{ passi su input } x \\ \text{BOH} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La macchina M_t effettivamente utilizza al più t passi, ma talvolta dà una risposta di tipo "non so" (rappresentata dall'output BOH); si osservi che M_t *non* è un accettore. La macchina classifica l'insieme degli input ω in tre sottoinsiemi disgiunti SI_t, NO_t e BOH_t, dove $\mathrm{SI}_t \subseteq A$, $\mathrm{NO}_t \subseteq A^C$ e BOH_t è l'insieme di tutte le istanze per cui non è stata trovata una soluzione (accettazione o rifiuto) entro t passi; la situazione è mostrata in Fig. 2.1.

In un certo senso, M_t è una versione degradata di M, e "riconosce" una versione approssimata dell'insieme A. È naturale chiedersi che tipo di relazione di "equivalenza" possa essere indotta usando M_t invece di M. Ciò che vorremmo avere è una specie di approssimazione di $\sim$, ma come potremmo definirla? Chiaramente, se M_t dà una risposta esatta per entrambi gli input (cioè se dà in output un SI oppure un NO), allora si può decidere $\sim$ su quegli input in modo esatto. Ma cosa dovremmo fare se ottenessimo una risposta "non so" per un input (o per entrambi)? Potremmo decidere in qualche modo casuale (per esempio, lanciando una moneta), ma preferiamo farlo in modo deterministico.

Naturalmente, qualsiasi protocollo scegliamo esso si rivelerà inevitabilmente suscettibile di errore: la sola cosa che possiamo fare è decidere se vogliamo avere un eccesso di "SI" o di "NO". La nostra scelta sarà di fare giudizi che non siano mai sbagliati quando rispondiamo "NO", ma che possono rivelarsi errati quando rispondiamo "SI"[6]. In pratica,

[6]Questo è in accordo con quanto succede nella pratica della misurazione: se dobbiamo confrontare, per esempio, due oggetti mediante una bilancia a due piatti, possiamo senza tema di errore considerare i due pesi diversi ogni volta che questo è il responso della bilancia, ma quando i due piatti rimangono in equilibrio dovremo necessariamente considerare i due oggetti indistinguibili (per quanto riguarda il peso) almeno finché non ci venga messa a disposizione una bilancia più precisa (il che richiede quindi un maggiore "sforzo" per raggiungere la decisione).

possiamo definire una relazione $\sim_t$ ponendo

$$x \sim_t y \text{ se e solo se } M_t(x) = M_t(y) \text{ o } M_t(x) = \mathrm{BOH} \text{ o } M_t(y) = \mathrm{BOH}.$$

In altri termini, scegliamo di rispondere “SI” ogni volta che c’è qualche possibilità che “SI” sia la risposta esatta, mentre rispondiamo “NO” solo se siamo sicuri che “NO” sia corretto.

Ora, che tipo di relazione è $\sim_t$? È certamente riflessiva e simmetrica, ma *non* è transitiva; infatti, supponiamo che x sia accettato entro t passi, z sia rifiutato entro t passi, mentre y non sia né accettato né rifiutato entro quel periodo. Per quanto ne sappiamo, *x potrebbe essere* equivalente ad y, e analogamente y potrebbe essere equivalente a z, ma certamente *x non è equivalente* a z: cioè $x \sim_t y$ e $y \sim_t z$ ma $x \not\sim_t z$.

In effetti, il grafo di $\sim_t$ è il duale di un grafo bipartito completo con alcuni nodi isolati aggiunti: più precisamente, abbiamo le tre clique SI_t, NO_t e BOH_t, più tutti gli archi che connettono elementi di SI_t a elementi di BOH_t, ed elementi di BOH_t ad elementi di NO_t. Detto altrimenti, $\sim_t$ è la relazione totale meno $(\mathrm{SI}_t \times \mathrm{NO}_t) \cup (\mathrm{NO}_t \times \mathrm{SI}_t)$. Si noti che $\sim_t \supseteq \sim_{t+1}$ e, inoltre, $\cap_{t\in\omega} \sim_t = \sim$, in quanto $\mathrm{SI}_t \subseteq \mathrm{SI}_{t+1} \subseteq A$, $\mathrm{NO}_t \subseteq \mathrm{NO}_{t+1} \subseteq A^C$ e $\mathrm{BOH}_t \supseteq \mathrm{BOH}_{t+1}$ (con $\cap_{t\in\omega}\mathrm{BOH}_t = \emptyset$).

Perciò $\sim_t$ non è una relazione di equivalenza, in quanto non è transitiva, ma “approssima” una relazione di equivalenza, in un senso che renderemo preciso nel Capitolo 5: relazioni che siano riflessive e simmetriche ma non transitive, come $\sim_t$, sono di solito chiamate “relazioni di tolleranza” [Zee62]. Ciò che vogliamo discutere qui è semplicemente la relazione che esiste fra il problema di raggiungere l’equivalenza e il forte limite che abbiamo imposto sulle risorse (in questo caso: il tempo) che possono essere utilizzate.

Questo problema si può chiaramente riproporre in termini di “osservabilità”; che tipo di proprietà possiamo osservare al tempo t? Se la parola *proprietà* è da intendersi in senso estensionale come “insieme di oggetti” (un insieme di numeri, in questo caso), allora le proprietà che possiamo osservare sono:

- le proprietà banali $\emptyset$ e ω;
- la proprietà di “stare eventualmente nell’insieme A”, che è rappresentata dall’insieme $\mathrm{FORSESI}_t = \mathrm{SI}_t \cup \mathrm{BOH}_t$;
- la proprietà di “stare eventualmente fuori dall’insieme A”, che è rappresentata da $\mathrm{FORSENO}_t = \mathrm{NO}_t \cup \mathrm{BOH}_t$.

Questo definisce una *topologia delle proprietà osservabili al tempo t*, diciamo Ω_t, e una base per gli aperti di Ω_t è data da $\{\mathrm{FORSESI}_t, \mathrm{FORSENO}_t\}$; gli aperti di Ω_t sono rappresentati in Fig. 2.2. (L’idea che le proprietà osservabili formino una topologia è ben motivata e spiegata in [Smy92].)

Ora, questo naturalmente induce una topologia sul limite, cioè la topologia $\Omega = \cup_{t\in\omega}\Omega_t$, i cui aperti sono proprio le proprietà osservabili dopo un certo numero finito di passi. Possiamo quozientare lo spazio (ω, Ω) mediante la relazione $\sim$, ottenendo una topologia Ω' sull’insieme di due elementi $\{A, A^C\}$: che topologia otteniamo? Si noti che $\{A\}$ è aperto se e solo se $\{A\} \in \Omega_t$ per qualche t, cioè se e solo se M lavora in tempo costante, e in questo caso anche $\{A^C\} \in \Omega_t$. Perciò la topologia Ω' è o la topologia indiscreta o quella

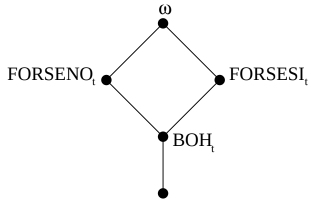


Figura 2.2: La topologia delle proprietà osservabili Ω_t

discreta (non otteniamo mai la topologia di Sierpinski). Inoltre, Ω' è discreta se e solo se M lavora in tempo costante.

Quest'idea di indurre una topologia sul limite a partire da topologie sulle osservazioni finite sarà ulteriormente approfondita nel Capitolo 5, dove dimostreremo anche come la si possa usare per dare approssimazioni finite a spazi topologici non numerabili, come lo spazio euclideo.

Nell'esempio sopra presentato, l'equivalenza può effettivamente essere decisa se non imponiamo alcuna restrizione sul tempo di risposta. Presenteremo ora una situazione in cui l'equivalenza è di fatto indecidibile: non c'è un modo di decidere se due oggetti siano uguali, nemmeno usando risorse illimitate. Ancora una volta, il problema qui è strettamente connesso alla possibilità di effettuare osservazioni finitamente decidibili. Il seguente esempio è preso, con alcune lievi modifiche, da [Smy92].

Si consideri una macchina che fornisca una sequenza binaria infinita, un bit per volta: l'insieme di tutti i possibili output è quindi $\{0,1\}^\omega$ (l'insieme delle sequenze infinite numerabili di bit). Ogni sequenza di questo tipo $\mathbf{x} = \langle x_0, x_1, \ldots\rangle$ può essere interpretata come un numero reale, denotato da x, la cui espansione binaria è $.x_0x_1x_2\ldots$. Quindi, per esempio, la sequenza $\langle 0,1,1,0,0,0,\ldots\rangle$ rappresenta il numero $3/8$.

Un osservatore guarda la sequenza di output man mano che viene prodotta, e prende nota delle varie proprietà che tale sequenza presenta. Poiché la macchina è una "scatola nera", i giudizi dell'osservatore possono basarsi solo sui prefissi finiti che fino a quel momento sono stati emessi. Una domanda preliminare è quale tipo di proprietà (cioè, di sottoinsiemi di $\{0,1\}^\omega$) siano osservabili.

Naturalmente, una proprietà è osservabile se e solo se può essere osservata entro un certo tempo finito; in altre parole, le sole proprietà osservabili di base sono quelle della forma $w\uparrow$ dove w è una stringa binaria finita, e $w\uparrow$ denota l'insieme di tutte le sequenze infinite che abbiano w come prefisso. Per esempio, la proprietà di "iniziare con uno 0" è osservabile, mentre la proprietà di "contenere un numero finito di zeri" non lo è.

Si noti che, se P e P' sono proprietà osservabili, allora anche $P \cap P'$ lo sarà; inoltre, una disgiunzione arbitraria di proprietà osservabili è anch'essa osservabile[7]. Quindi, le proprietà osservabili formano una topologia Ω_{obs} su $\{0,1\}^\omega$, e $\{w\uparrow : w \in \{0,1\}^*\}$ è una base per questa topologia.

[7] Questa è una semplificazione: l'idea che le proprietà osservabili abbiano le stesse proprietà di chiusura degli aperti di uno spazio topologico è stata inizialmente proposta da Abramsky in [Abr87]. Una critica ed alcune precisazioni su questa proposta sono discusse in [Smy92].

Smyth [Smy92] discute la topologia Ω_{obs} in modo approfondito[8]; ciò che ci serve, per i nostri scopi attuali, è solo qualche semplice proprietà di questa topologia.

Supponete di possedere due macchine come quella sopra descritta, ognuna delle quali sta emettendo una qualche sequenza (ignota); siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ le due sequenze. Vogliamo decidere se $x = y$ oppure no. Questa è una proprietà osservabile? Naturalmente no. Anche se ad un certo punto osservassimo lo stesso prefisso finito di entrambe le stringhe non potremmo certo concludere che le due sequenze (infinite) rappresentano lo stesso valore (nemmeno nel caso in cui esse siano effettivamente "la stessa" sequenza), poiché non possiamo ipotecare il futuro.

Eppure, sebbene il problema $x = y$ sia indecidibile, possiamo sempre provare ad approssimarne la soluzione, più o meno come abbiamo fatto per $\sim$. Per esempio, potremmo dire che $x =_t y$ se i due prefissi $w = \langle x_0, \ldots, x_t \rangle$ e $v = \langle y_0, \ldots, y_t \rangle$ osservati al tempo t sono compatibili, nel senso che esistono almeno due possibili elementi di $w \uparrow$ e $v \uparrow$ che rappresentano lo stesso reale.

Ancora una volta, la relazione $=_t$ non è una relazione di equivalenza: ci sono alcune coppie che vengono sicuramente escluse come non-equivalenti, ma ci possono essere altre coppie che vengono considerate come "eventualmente uguali" solo perché c'è qualche possibilità che risultino (in futuro) uguali (cioè, che risultino rappresentare lo stesso numero reale). Per esempio, le sequenze $\langle 1,0,0,0,0 \rangle$ e $\langle 0,1,1,1,1 \rangle$ devono essere considerate uguali, poiché possono essere prefissi rispettivamente di $\langle 1,0,0,0,0,\ldots \rangle$ e $\langle 0,1,1,1,1,\ldots \rangle$, che rappresentano entrambe il numero $1/2$.

Anche in questo caso, $=_t \supseteq =_{t+1}$ ed inoltre $=$ è l'intersezione (limite) delle relazioni $=_t$. Quindi, le nostre relazioni di tolleranza *approssimano* la relazione di equivalenza (indecidibile) $=$.

2.2 Analisi di due casi

In questa sezione, studieremo in modo più approfondito due esempi di situazioni in cui compaiono in modo naturale relazioni di tolleranza, e che hanno ispirato, in modi diversi, i primi studi astratti sulla relazione di concorrenza.

Se chiamiamo sistema distribuito un sistema in cui i ritardi di trasmissione sono non irrilevanti, è naturale considerare i componenti di tali sistemi come macchine asincrone: infatti, per sistemi di grandi dimensioni, non esiste alcuna garanzia che il periodo di clock necessario per ottenere la sincronizzazione dei componenti sia abbastanza grande da poter essere utilizzato correttamente in tutto il sistema. Il primo esempio è perciò l'analisi di un caso che mette in relazione l'idea di tolleranza con alcune problematiche nel disegno di circuiti asincroni. Gran parte della nostra discussione è basata su [Sei80], dove viene presentata un'analisi approfondita dei sistemi asincroni self-timed (si veda anche [Kat94] a questo proposito).

D'altro canto, abbiamo già menzionato il fatto che il sistema di assiomi originario di Petri per la concorrenza fu ispirato ai primi tentativi di assiomatizzare la fisica relativistica;

---

[8] Effettivamente, Ω_{obs} può essere ottenuta in un modo molto semplice; si ordini $\{0,1\}^\infty$ (l'insieme delle stringhe binarie finite e infinite su $\{0,1\}$) per prefisso, e si induca su questo ordine parziale la topologia di Scott. Allora Ω_{obs} è semplicemente il sottospazio degli elementi massimali; esso è effettivamente omeomorfo allo spazio di Cantor (Sezione 5.7; vedi anche [Smy92]).

la ragione è che la simultaneità relativistica è una relazione di tolleranza che non può essere un'equivalenza. Quindi, discuteremo in modo abbastanza esteso alcuni fatti cruciali riguardanti la simultaneità relativistica dal punto di vista della teoria dei modelli.

2.2.1 Utilizzo della tolleranza come strumento di progettazione: il caso dei circuiti asincroni

Gran parte della progettazione di un sistema riguarda gli aspetti funzionali che possono essere descritti con strumenti puramente topologici, con l'aiuto di diagrammi logici, diagrammi di circuito o simili, i quali permettono ai progettisti di concentrare la loro attenzione sul comportamento del sistema ad un livello di astrazione dove i dettagli implementativi risultino irrilevanti. Ciò nonostante, prima o poi, diventa necessario per il progettista pensare alla geometria spaziale del sistema, che è governata da leggi fisiche specifiche, le quali determinano anche il comportamento del circuito nel tempo.

Questo richiede l'uso di qualche tipo di disciplina al fine di stabilire un insieme di convenzioni di segnalazione sulle interconnessioni del sistema e sulla temporizzazione degli elementi, con il fine di ottenere la giusta sequenzializzazione degli eventi che si verificano nei diversi punti del sistema, e di prevenire comportamenti inconsistenti.

Ci sono fondamentalmente due approcci che possono essere utilizzati per definire queste discipline: i sistemi sincroni e i sistemi (asincroni) self-timed. Nel primo caso, la sequenzializzazione e il tempo sono connessi mediante un segnale di clock globale, che sincronizza gli eventi in tutto il sistema. Nel secondo, la connessione fra sequenza e tempo viene mantenuta solo localmente, all'interno delle varie componenti atomiche del sistema (i cosiddetti "elementi"), mentre qualche tipo di protocollo di segnalazione viene utilizzato per mantenere la consistenza globale.

Anche se oggi i sistemi sincroni sono di gran lunga i più largamente utilizzati, essi presentano alcuni seri limiti (quanto meno potenziali): alcuni di essi sono legati alle difficoltà nello spostare le informazioni da un punto all'altro in un singolo periodo del clock globale, e nel maneggiare progetti molto grandi in un ambito in cui tutte le parti del sistema debbano operare insieme all'unisono. Inoltre, se un sistema è costituito da molte parti indipendentemente temporizzate, il problema della sincronizzazione dei clock diventa rilevante; sfortunatamente, la sincronizzazione dei clock non può essere ottenuta con affidabilità completa, a causa della presenza di stati metastabili [Sei80].

Quindi, la disciplina self-timed sembra essere la più promettente: ogni elemento può essere disegnato semplicemente come un sistema sincrono, con la possibilità di fermare e far ripartire il clock locale in ogni istante. Si utilizzano delle convenzioni di segnalazione per sincronizzare le varie parti in modo indipendente dai ritardi (cioè in un modo che sia trasparente rispetto ai ritardi nella comunicazione).

In questa sottosezione, presenteremo prima alcuni esempi di protocolli di segnalazione che vengono tipicamente usati nel disegno di sistemi self-timed; poi, discuteremo in modo più approfondito alcune assunzioni implicite che normalmente si considerano quando si usa l'approccio self-timed, introducendo la nozione di "regione equipotenziale". Infine, vedremo come questo si relaziona con l'idea di osservabilità che può essere descritta usando funzioni continue rispetto alla tolleranza.

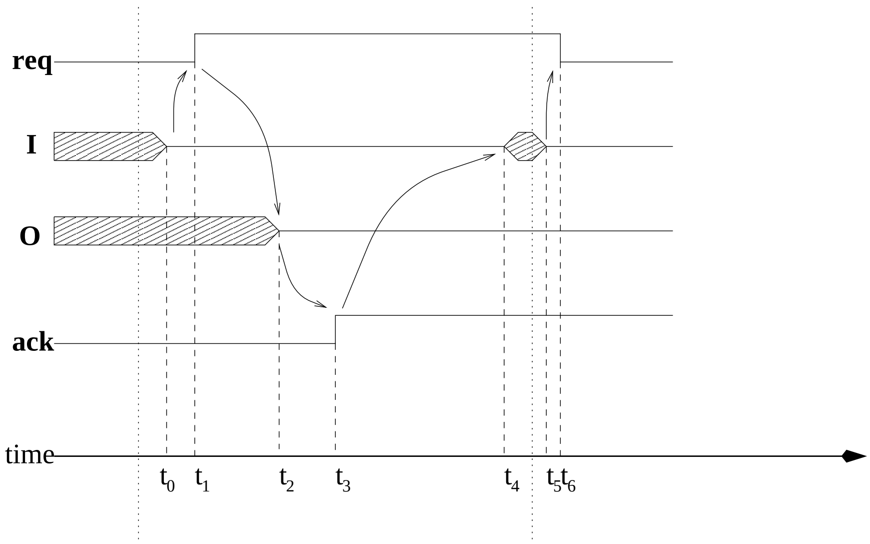


Figura 2.3: Segnalazione two-cycle (diagramma spazio-temporale)

Protocolli di segnalazione two-cycle e four-cycle

Si consideri un sistema asincrono con due agenti che devono interagire: un agente (chiamato *master*) deve richiedere all'altro (detto *slave*) di elaborare un certo insieme di dati, e l'elaborazione dovrebbe proseguire con lo slave che risponde emettendo un risultato diretto al master. Assumiamo che non ci sia un clock globale per sincronizzare la comunicazione tra master e slave, il che significa che il processo di comunicazione richiede un tempo non trascurabile, e il protocollo deve garantire la correttezza indipendentemente dai ritardi. I protocolli (ovvero le convenzioni di segnalazione) con questa proprietà sono normalmente detti *delay-insensitive*, e sono tipici di ogni approccio alla progettazione di sistemi asincroni.

Ci sono due tipi di linee di comunicazione dal master allo slave: le prime sono rappresentate dai dati di input **I** verso lo slave, e le seconde dalle linee di segnalazione necessarie per realizzare il protocollo di comunicazione. Inoltre, due tipi di linee escono dallo slave, cioè le linee di output **O** e le linee che forniscono i segnali di feedback al master.

Il modo più semplice per implementare il protocollo di comunicazione è il seguente. Si supponga che ci siano solo due linee di segnalazione, una da **M** (il master) a **S** (lo slave), chiamata linea di richiesta (**req**), e una da **S** a **M**, chiamata linea di conferma (**ack**); entrambe le linee trasportano un'informazione binaria (cioè, possono essere basse o alte). Inizialmente, sia **req** che **ack** sono basse (in simboli, **req** $\downarrow$, **ack** $\downarrow$). Il protocollo procede come segue: quando **M** ha i dati di input pronti, asserisce **req** (**req** $\uparrow$) e lascia l'input stabile (senza più modificarlo), al fine di permettere a **S** di leggerlo correttamente. Quando **S** osserva che **req** è alto, elabora l'input, prepara l'output e manda un segnale di conferma indietro ad **M** asserendo **ack**, che diventa alto. Quando **M** nota che **ack** è alto, inizia a leggere l'output.

Questo protocollo è noto come *segnalazione two-cycle*, e può essere rappresentato in forma di diagramma spazio-temporale come mostrato in Fig. 2.3.

Interpretiamo il diagramma come segue: **req** e **ack** sono rappresentati semplicemente mediante delle linee che possono essere basse () o alte (); **I** e **O** possono essere o stabili e corrette (linee semplici) oppure no (aree tratteggiate).

Per semplicità, assumiamo di avere un asse del tempo (reale) globale. Inizialmente (al tempo 0) **req** e **ack** sono basse. Al tempo t_0 gli input sono pronti e il master asserisce **req** (tempo t_1). Quando lo slave lo nota, prepara l'output (tempo t_2) e asserisce **ack** (al tempo t_3). Quando **M** osserva che **ack** è alto, inizia a leggere l'output e cambia l'input, preparandolo per una nuova richiesta (tempo t_4). Ora, quando il nuovo input è pronto (al tempo t_5), **req** viene abbassato (il che accade all'istante t_6) per far sapere allo slave che il nuovo input deve essere elaborato.

Questo fa iniziare un altro ciclo di richiesta/conferma (il primo ciclo è quello che compare fra le due linee puntinate nel diagramma precedente), che è simile al primo, ma dove il ruolo di "basso" e "alto" sono scambiati, perché ora le due linee di segnalazione sono entrambe alte.

Gli algoritmi per il master e per lo slave possono essere scritti informalmente come segue:

MASTER $\equiv$ **loop**
    prepara l'input;
    inverti **req**;
    aspetta **ack**;
    leggi l'output;
forever

SLAVE $\equiv$ **loop**
    aspetta **req**;
    elabora l'input;
    prepara l'output;
    inverti **ack**;
forever

In questi algoritmi abbiamo utilizzato due primitive speciali:

- *inverti* che cambia il valore su una linea (se era bassa, diventa alta, e viceversa);
- *aspetta* che aspetta che il valore su una linea cambi.

Nel caso speciale di una comunicazione dove sia l'input che l'output sono vuoti, il protocollo si reduce ad un semplice protocollo di sincronizzazione (*handshaking*), il cosiddetto *two-cycle handshaking*. In questo caso, il diagramma spazio-temporale (che ora comprende solo le linee **req** e **ack**) è semplicemente quello presentato in Fig. 2.4 (come al solito, abbiamo usato una coppia di linee puntinate per rappresentare un singolo ciclo di richiesta/conferma; si osservi che i cicli partono alternativamente con entrambe le linee alte, o entrambe basse).

Il problema della segnalazione two-cycle (o del two-cycle handshaking) è che richiede che il master e lo slave dispongano di uno stato addizionale per "ricordarsi" quale sia lo stato corrente delle linee di richiesta/conferma, e per invertirle in modo appropriato. In pratica, ci serve della memoria extra per tenere traccia dello stato di ogni linea.

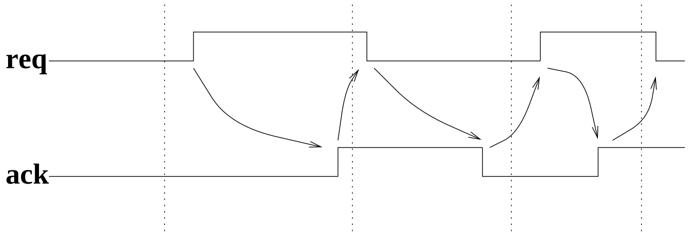


Figura 2.4: Two-cycle handshaking (diagramma spazio-temporale)

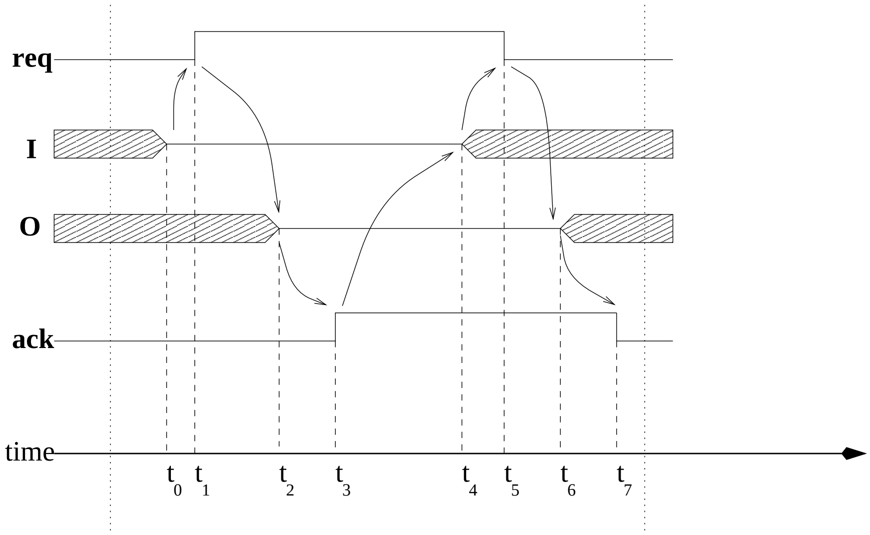


Figura 2.5: Segnalazione four-cycle (diagramma spazio-temporale)

Al fine di risolvere questo problema, si potrebbe progettare una soluzione più complessa (almeno, dal punto di vista delle transizioni), dove le due linee vengano riportate allo stato basso al termine di ogni ciclo, cosicché il master e lo slave non avrebbero bisogno di ricordarsi lo stato corrente delle linee in uscita. Questa soluzione è detta protocollo di segnalazione con ritorno a zero, o *segnalazione four-cycle*.

Il diagramma spazio-temporale di una segnalazione four-cycle è mostrato in Fig. 2.5.

Vediamo come procede un singolo ciclo di segnalazione in questo caso. Inizialmente, entrambe le linee sono basse. Al tempo t_0, l'input è pronto, e quindi **M** asserisce (tempo t_3) la linea di richiesta per far sì che lo slave capisca che i dati sono pronti per l'elaborazione. Quando lo slave nota che **req** è alto, legge l'input, elabora i dati e produce un output (al tempo t_2), e asserisce **ack** (tempo t_3): ora, entrambe le linee sono alte. Appena il master nota che **ack** è alto, può iniziare a leggere l'input (che ora sarà stabile), mentre l'input diventa instabile (nel senso che il master può, se vuole, cambiare il valore dell'input; ciò succede al tempo t_4). In pratica, il fatto che **ack** diventi alto corrisponde ad una segnalazione di "output pronto". Quando il master ha terminato di usare l'output, abbassa **req** (tempo t_5): solo a quel punto lo slave sarà autorizzato a cambiare l'output (al tempo t_6) e abbasserà la linea **ack** (tempo t_7).

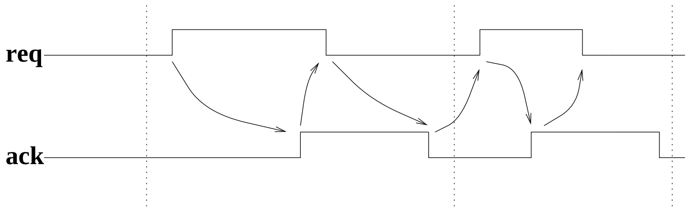


Figura 2.6: Four-cycle handshaking (diagramma spazio-temporale)

Osservate che entrambe le linee sono basse alla fine del ciclo. In pratica, lo stato delle due linee si può interpretare come segue:

- entrambe le linee sono basse: il master non ha ancora sottoposto alcuna richiesta; lo slave è pronto ad elaborare i dati;
- **req** è alto, **ack** è basso: il master ha preparato i dati di input (che sono attualmente stabili) e la richiesta è stata sottoposta allo slave;
- entrambe le linee sono alte: l'output dallo slave è pronto; in questa fase, l'output è stabile, mentre l'input può cambiare;
- **req** è basso, **ack** è alto: il master è stato servito, e l'output può essere cambiato; lo slave sarà pronto a servire un'altra richiesta.

Si noti che, affinché il master possa sottoporre una nuova richiesta, il fatto che **ack** sia diventato basso deve essere stato osservato dal master, perché altrimenti il master non potrebbe sapere se lo slave abbia già avuto conferma dell'avvenuta lettura dell'output precedente.

Come prima, ignoriamo la parte di dati, e indichiamo un semplice schema di sincronizzazione (il *four-cycle handshaking*) in Fig. 2.6.

Osservate che gli algoritmi corrispondenti alla segnalazione four-cycle sono più complicati, perché coinvolgono più transizioni, ma non fanno uso della primitiva *inverti* (che richiede memoria extra):

MASTER ≡ **loop**
prepara l'input;
set **req**;
aspetta-alto **ack**;
leggi l'output;
reset **req**;
aspetta-basso **ack**;
forever

SLAVE ≡ **loop**
aspetta-alto **req**;
elabora l'input;
prepara l'output;

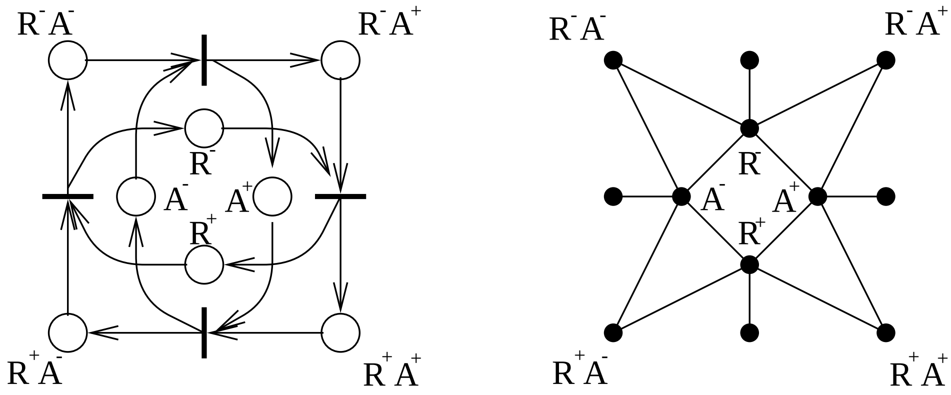


Figura 2.7: Le quattro stagioni

set **ack**;
aspetta-basso **req**;
reset **ack**;
forever

Qui abbiamo fatto uso delle seguenti primitive:

- *set/reset* fanno diventare una linea alta/bassa;
- *aspetta-alto/basso* aspetta che una linea diventi alta/bassa.

In generale, la segnalazione four-cycle è più facile da implementare della segnalazione two-cycle, in quanto non ha bisogno di memoria extra per ricordare lo stato corrente di ogni linea.

Può essere opportuno, a questo punto, rappresentare il four-cycle handshaking sottoforma di una Rete di Petri, come in Fig. 2.7 (sinistra), nota come *rete delle quattro stagioni*. Il fatto più interessante riguardo questa rete è che essa può essere ricostruita dallo spazio di tolleranza (relazione di concorrenza) disegnato alla sua destra (usando le tecniche descritte da Petri in [Pet80a]), ed è stata indicata [PS87] come il più piccolo modello del sistema di assiomi per la concorrenza[9].

Assunzioni implicite — Regioni equipotenziali

Sebbene le discipline di segnalazione descritte sopra siano piuttosto standard nella progettazione di circuiti asincroni, riteniamo che una comprensione più profonda delle assunzioni implicite cui questi protocolli sottostanno sia necessaria.

In effetti, stiamo considerando un sistema asincrono, che lavora in maniera self-timed, e dove il controllo è delegato completamente ai singoli elementi: non esiste un concetto di clock (globale), ma esiste un protocollo distribuito finalizzato a sequenzializzare correttamente i singoli eventi. Un sistema self-timed è dunque un'interconnessione di parti, ciascuna chiamata *elemento* (nel caso del nostro esempio, esistono solo due elementi, il

[9]Può anche essere interessante osservare che l'ordine parziale che si ottiene dallo sviluppo di questa rete è un semiordine che incontreremo ancora nel Capitolo 6.

master e lo slave): possiamo assumere che ogni elemento abbia un qualche modo per preservare la correttezza della sequenza di eventi che si verificano localmente; per esempio, ogni elemento potrebbe possedere un clock interno che fa in modo che gli eventi si verifichino nella giusta sequenza.

Il problema principale nel disegno di un sistema self-timed è quello di preservare la correttezza della sequenza *globale* degli eventi, anche qualora non ci sia alcun clock globale per sincronizzare le azioni che si verificano nei diversi elementi. Al fine di raggiungere questo scopo, ci sono speciali linee di segnalazione che vengono utilizzate dagli elementi per comunicare fra loro, per esempio, indicando che una certa computazione può iniziare, o che un'altra è stata completata. Un punto importante da notare, qui, è che la correttezza del protocollo di segnalazione *non deve* dipendere da alcuna assunzione sui ritardi (e, per questo, spesso si parla di protocollo *delay-insensitive*). In altri termini, la sequenzializzazione degli eventi deve essere corretta indipendentemente dai ritardi di comunicazione fra gli elementi.

È necessaria qualche attenzione se si vuole comprendere il bisogno di preservare le relazioni causali nella sequenzializzazione degli eventi, poiché gli elementi e le connessioni fra elementi sono entità fisiche: secondo i principi relativistici, le relazioni fra occorrenze di eventi in punti diversi dello spazio possono essere interpretate in modo inconsistente da osservatori che si trovino in locazioni diverse. Inoltre, se l'instradamento dei messaggi di comunicazione e i ritardi di trasmissione relativi sono incerti, una relazione che vale in una certa regione fisica vicina a dove viene creata può cessare di valere altrove. Questa semplice osservazione ha molte conseguenze, e rischia di rendere la discussione sulle proprietà dei sistemi asincroni molto più complicata del necessario: per evitare tali difficoltà, di solito si attua una assunzione semplificativa, ammettendo che esistano piccole zone del sistema dove i ritardi sono trascurabili, e quindi dove la comunicazione si può assumere come istantanea.

Tali piccole zone del circuito (sistema) vengono chiamate *regioni equipotenziali*; come Seitz [Sei80] osserva:

> This approximation is justified so long as the area is sufficiently small that the delay associated with equalizing the potential across any wire is small in comparison with switching delays or signal transition times. This approximation is roughly equivalent to an assertion that related occurrences are known to be sufficiently separated in time in comparison with wire delays that the relation will be observed to hold from any point of observation within the region.

La determinazione delle regioni equipotenziali non è affatto ovvia, e può essere scelta in base a molti criteri diversi; può essere caratterizzata definendo un limite sull'area, o sulla massima lunghezza delle connessioni all'interno di una regione, e questi limiti dipenderanno in generale dai vari livelli. Come Seitz nota, se ci si limita a considerare la tecnologia MOS, "a single chip is today [in 1980] a good approximation of an equipotential region [...], so long as there are no metal wires longer than about 17 mm, diffused wires longer than about 500 μ, or poly wires longer than about 300 μ".

Naturalmente, è necessario che ogni elemento sia contenuto per intero in almeno una regione equipotenziale, ma può essere incluso in più di una: questo esprime il fatto che

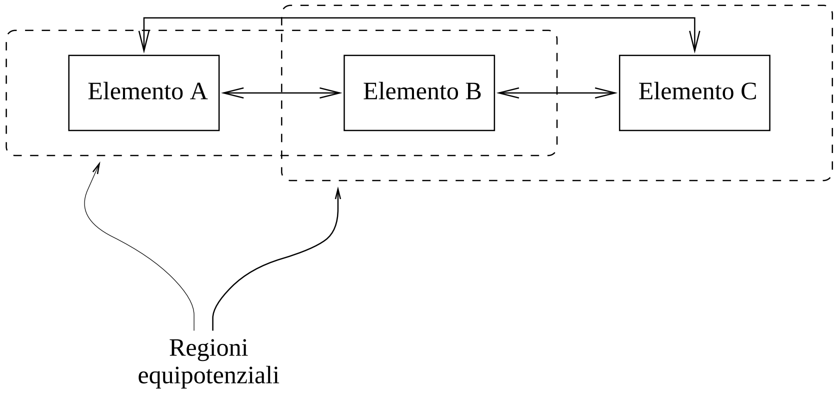


Figura 2.8: Le regioni equipotenziali definiscono un ricoprimento

gli elementi vengano interpretati come parti localmente sincronizzate di un sistema che è globalmente asincrono. Le regioni equipotenziali quindi non partizionano il sistema in componenti disgiunte, ma piuttosto definiscono un *ricoprimento* dell'insieme delle locazioni spaziali in cui ogni elemento del ricoprimento corrisponde ad una singola regione equipotenziale, come in Fig. 2.8.

C'è un modo molto semplice, ma significativo, di pensare alle regioni equipotenziali. Supponete, con una visione molto approssimativa del sistema, che ogni elemento sia rappresentato da un punto nello spazio euclideo, con uno schema di connessione completo (cioè, ogni punto può comunicare direttamente con ogni altro), e che i ritardi di segnalazione siano proporzionali alla distanza fra mittente e ricevente; inoltre, sia v la velocità dei segnali. Il tempo richiesto affinché il segnale inviato da x venga ricevuto la sua destinazione y è quindi $d(x, y)/v$, dove $d(x, y)$ denota la distanza fra x e y. Visto in un altro modo, l'insieme dei punti a cui x può segnalare entro il tempo t è semplicemente l'insieme di tutti i punti la cui distanza da x sia al più $v \cdot t$. Questo definisce un cono "in avanti" da ogni punto dello spazio-tempo (chiamato *cono posteriore* in [Car58]): in altre parole, per ogni punto spazio-temporale P esiste un "cono" di punti spazio-temporali nel futuro a cui P può segnalare. Naturalmente, esiste anche un'intera regione di spazio-tempo nel passato che può segnalare a P (chiamata "cono all'indietro", o *cono anteriore*). Questa situazione è rappresentata in Fig. 2.9, dove sono indicati i coni anteriore e posteriore di un punto nello spazio unidimensionale (le linee orizzontali corrispondono ad un time-slice, cioè ad un insieme di punti nello spazio-tempo la cui coordinata temporale è costante); un disegno simile si trova in [Ben91] (Chapter I.2, Fig. 5).

Assumere la presenza di regioni equipotenziali è equivalente ad assumere che i segnali si propaghino simultaneamente all'interno di ogni regione, appena vi entrano. La Fig. 2.10 mostra il cono posteriore relativo ad un punto nel caso unidimensionale in cui si assuma una struttura di regioni equipotenziali.

Ora vogliamo affrontare il problema di definire più formalmente il concetto di regione equipotenziale, e di fornire una nozione di "osservabilità" che sia ragionevole per una descrizione di un sistema asincrono come sopra indicato. Un ente primitivo di cui abbiamo sicuramente bisogno è la *locazione spaziale*: indichiamo con L l'insieme di queste locazioni,

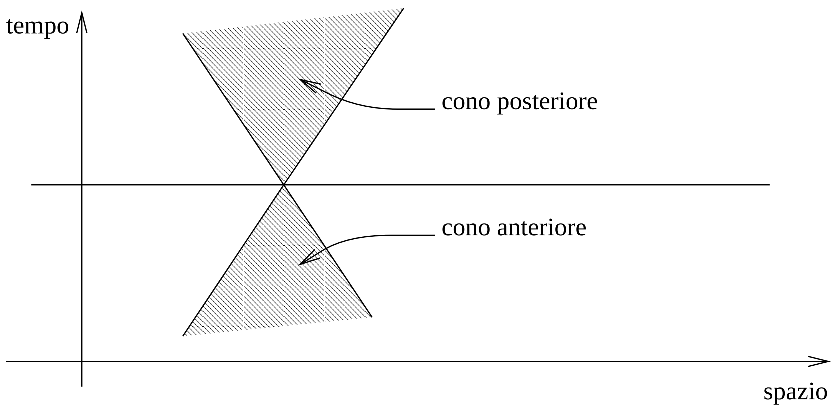


Figura 2.9: Coni di segnalazione nel caso unidimensionale

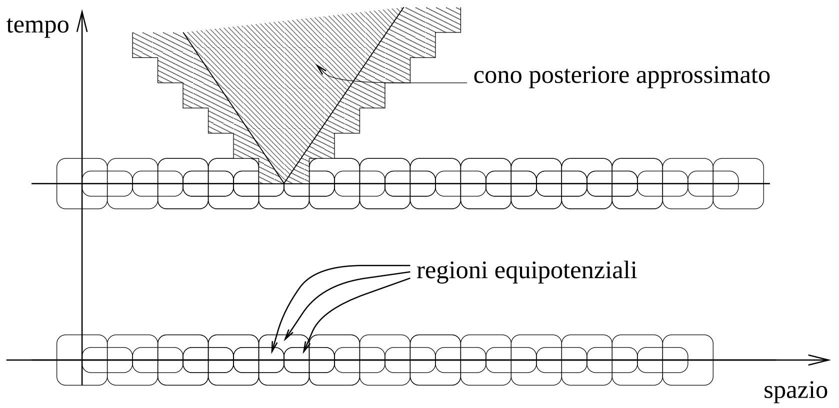


Figura 2.10: Cono posteriore approssimato quando si assumano regioni equipotenziali

che sono semplicemente entità (ideali e prive di estensione) dove la computazione ha luogo in qualche modo imprecisato.

L'insieme delle locazioni è coperto da *regioni equipotenziali*; in altre parole, c'è un insieme fissato $\mathcal{R} \subseteq \wp(L)$ di regioni che soddisfano i seguenti postulati:

- ogni regione $R \in \mathcal{R}$ è un insieme non vuoto (eventualmente infinito) di locazioni;
- ogni locazione appartiene a qualche regione, cioè per ogni $l \in L$ esiste qualche $R \in \mathcal{R}$ tale che $l \in R$;
- se R, R' sono due regioni, e $R \subseteq R'$, allora $R = R'$.

Le prime due richieste affermano semplicemente che $\mathcal{R}$ deve essere effettivamente un ricoprimento (proprio) di L; l'ultima richiesta significa che siamo interessati solo a regioni "massimali" (cioè, le regioni equipotenziali non possono essere innestate una dentro l'altra).

In effetti, possiamo fare alcune assunzioni più forti sulla struttura delle regioni equipotenziali; infatti, come precedentemente discusso, una regione equipotenziale è semplicemente un insieme (massimale) di punti del circuito che non sono troppo lontani l'uno dall'altro. In altri termini, una regione è definita da una sfera nello spazio metrico euclideo avente un raggio (piccolo) fissato. Sotto quest'assunzione, che implica che i ritardi dipendano solo dalla distanza fisica fra i punti, l'insieme delle regioni si può descrivere usando una relazione binaria di "vicinanza".

Due locazioni l e l' sono dette adiacenti se sono sufficentemente vicine fra loro (cioè se la loro distanza non supera il limite richiesto dal livello di approssimazione che stiamo utilizzando), e denotiamo questo fatto con $l \mathrel{\mathrm{co}} l'$. Quindi il ricoprimento $\mathcal{R}$ è semplicemente l'insieme delle clique massimali di co (una regione è un insieme massimale di punti adiacenti). Si noti che l'insieme delle regioni *non è* una partizione di L, a meno che co sia una relazione di equivalenza. In effetti, la sovrapposizione fra regioni non è un fatto incidentale, ma una precisa conseguenza della continuità spazio-temporale dei segnali: un segnale può essere direttamente inviato solo ad un punto che sia sufficientemente vicino nello spazio, il che significa che L deve essere connesso rispetto a co (nel senso della teoria dei grafi), il che a sua volta implica che $\mathcal{R}$ è effettivamente un ricoprimento e *non* una partizione dell'insieme delle locazioni. Cioè, formalmente, la relazione co di vicinanza è una relazione simmetrica e riflessiva (ma in generale non transitiva), la cui chiusura transitiva sia la relazione completa $L \times L$.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alle osservazioni. Possiamo assumere che ci sia un insieme V di viste, ognuna delle quali corrisponde ad una descrizione (parziale) dello stato dell'intero sistema. Ogni locazione, in ciascun istante, osserverà una certa vista. In generale, come conseguenza dei ritardi di trasmissione, diverse locazioni possono possedere, nello stesso istante, viste diverse ed *incompatibili* dello stato: questo può succedere perché l'informazione fluisce nel sistema con ritardi non trascurabili. Al fine di descrivere formalmente questa situazione, introduciamo un predicato Con di consistenza; più precisamente, $\mathrm{Con} \subseteq \wp_{\mathrm{fin}}(V)$ è un predicato finitario tale che:

- ogni vista sia consistente, cioè per ogni $v \in V$, si avrà $\{v\} \in \mathrm{Con}$;
- ogni sottoinsieme di una vista consistente sia anch'esso consistente; cioè, se $A \in \mathrm{Con}$ e $B \subseteq A$, allora anche $B \in \mathrm{Con}$.

Un'altra assunzione semplificativa è necessaria a questo punto per rendere la discussione più chiara. Possiamo assumere che la consistenza si possa descrivere con una relazione di compatibilità binaria $\sim$, che sia simmetrica e riflessiva[10] In altre parole, un insieme è consistente se e solo se è una clique della relazione $\sim$.

Possiamo a questo punto mettere in relazione la nozione di vicinanza con il concetto di consistenza (o compatibilità). In pratica, anche se le viste in locazioni diverse possono essere (in un dato istante) inconsistenti, la consistenza è richiesta quando le locazioni siano adiacenti: questo è precisamente ciò che intendiamo quando diciamo che "le relazioni prodotte in qualsiasi punto di una regione valgono dappertutto [nella stessa regione]" [Sei80]. Formalmente, l'osservazione istantanea di uno stato del sistema è semplicemente una funzione $o : L \to V$ che assegna una vista ad ogni locazione in modo tale che le viste assegnate a punti nella stessa regione siano consistenti. In altri termini, richiediamo che:

$$\forall R \in \mathcal{R}, \forall A \subseteq_{\text{fin}} o(R).\, A \in \text{Con}.$$

Si noti che la consistenza viene espressa dicendo che ogni sottoinsieme finito deve essere consistente.

Sotto la nostra assunzione semplificativa, questo è del tutto equivalente a richiedere che la relazione di compatibilità valga sempre fra viste di locazioni adiacenti, cioè

$$\forall l, l' \in R.\, l \operatorname{co} l' \implies o(l) \sim o(l').$$

In effetti, questo accade se e solo se la funzione $o : (L, \text{co}) \to (V, \sim)$ è un morfismo di grafi, o (un termine che introdurremo più avanti) una funzione "continua rispetto alla tolleranza".

Riassumendo, possiamo descrivere la geometria spaziale del sistema come uno spazio di tolleranza (cioè, un grafo non orientato), dove la tolleranza corrisponde alla vicinanza, e possiamo usare funzioni continue rispetto alla tolleranza (cioe, morfismi di grafi) per descrivere le osservazioni, dove il codominio è anch'esso uno spazio di tolleranza di "viste", in cui la relazione corrisponde alla compatibilità. Concludendo, possiamo dire con uno slogan che "l'osservabilità implica la continuità", nel senso che ogni stato osservabile è una funzione continua.

2.2.2 Relazioni di tolleranza e assiomatizzazioni del tempo relativistico

In questa sottosezione faremo una breve digressione sulla possibilità di assiomatizzare il tempo relativistico, e dimostreremo come la nozione relativistica di simultaneità assuma *inevitabilmente* la forma di una relazione di tolleranza. La nostra discussione è basata sull'assiomatizzazione data nel Capitolo I.2 di [Ben91].

[10]Quest'assunzione è piuttosto restrittiva, ma in seguito vedremo come si possa eliminare, lavorando in modo più astratto. Infatti, introdurremo più avanti la nozione di "spazio di tolleranza generalizzato", dove la tolleranza non sarà una relazione binaria, ma piuttosto un predicato finitario che soddisfi esattamente le stesse restrizioni di Con. Se avessimo dotato sia l'insieme delle locazioni che l'insieme delle viste di relazioni di tolleranza generalizzate in questo senso, avremmo ottenuto esattamente gli stessi risultati.

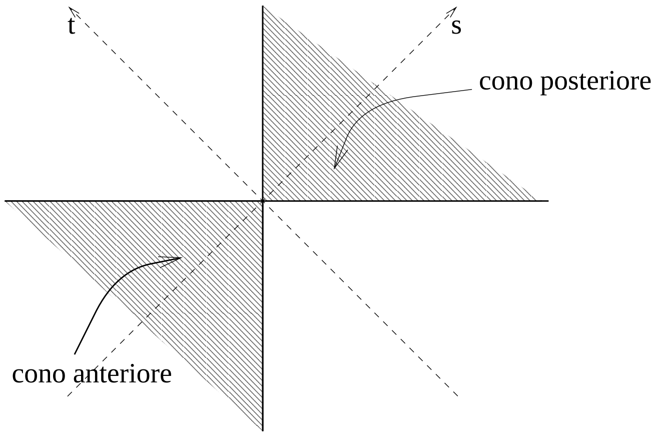


Figura 2.11: Coni di segnalazione (ruotati) nello spazio di Minkowski bidimensionale

Precedenza e simultaneità in ambito relativistico

Torniamo per un momento alla rappresentazione di Fig. 2.9: in quel caso stavamo considerando una forma molto semplice dello spazio-tempo, dove lo spazio era solo unidimensionale (cioè, stavamo lavorando nello spazio di Minkowski bidimensionale). Poiché intendiamo studiare una descrizione relativistica del mondo fisico, prendiamo c (la velocità della luce) come velocità di segnalazione del sistema. Quindi, il cono posteriore di un punto P nello spazio-tempo è semplicemente l'insieme dei punti futuri nello spazio-tempo che possono essere raggiunti da un segnale proveniente da P che viaggi alla velocità della luce. Possiamo grandemente semplificare la rappresentazione, assumendo che $c = 1$ e ruotando l'intero diagramma in senso orario di 45°: in questo modo, i coni posteriore ed anteriore dell'origine sono semplicemente il primo ed il terzo quadrante (vedi Fig. 2.11).

Chiaramente, si può a questo punto introdurre una relazione di precedenza fra punti dello spazio-tempo, postulando che

$$(x, y) < (x', y') \iff x < x' \wedge y < y'$$

(che esprime la condizione sotto cui il punto (x, y) può segnalare ad (x', y'), cioè sotto cui (x', y') sia nel cono posteriore di (x, y)). Vale la pena di notare che non c'è una ragione particolare per assumere che spazio e tempo abbiano la struttura di $\mathbb{R}$: possiamo prendere lo spazio-tempo come $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ o addirittura $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, se ci accontentiamo di un'approssimazione che abbia una quantità numerabile di punti. (Questo è ciò che in effetti si fa quando si utilizzano strumenti di misurazione del tempo e dello spazio dotati di un potere di risoluzione finito).

Ora, siano P e Q due punti qualsiasi nello spazio-tempo; chiaramente, si hanno diverse possibilità:

- P e Q possono essere causalmente relati, in una delle due direzioni; cioè potremmo avere $P < Q$ oppure $Q < P$;
- è possibile che P e Q non siano causalmente relati, semplicemente perché solo un segnale che viaggi esattamente alla velocità della luce può connetterli; definiamo

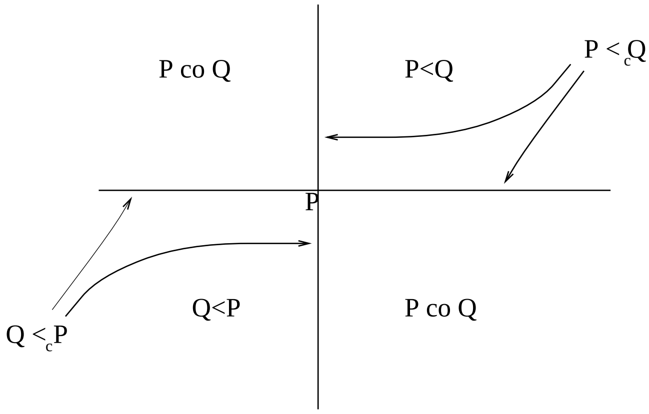


Figura 2.12: Le relazioni di precedenza, connettibilità alla velocità della luce e simultaneità

pertanto una relazione $<_c$ (che Van Benthem chiama "connettibilità alla velocità della luce") postulando che

$$P <_c Q \iff \neg(P < Q) \wedge \forall R. (Q < R \implies P < R);$$

in altre parole, P non può segnalare a Q, ma P può segnalare ad ogni punto a cui Q può segnalare;

- infine, se nessuna delle relazioni $P < Q$, $Q < P$, $P <_c Q$, $Q <_c P$ vale, diremo che P e Q sono concorrenti, o simultanei, e scriveremo $P \text{ co } Q$.

Presentiamo, in Fig. 2.12, come queste diverse possibilità siano realizzate da diversi punti nel diagramma spazio-temporale.

Ora, osserviamo che la concorrenza è chiaramente una relazione riflessiva e simmetrica, ma *non* è transitiva, cioè è solo una relazione di tolleranza, e non un'equivalenza: questo non dovrebbe sorprendere, dopotutto (la stessa situazione si verifica nel contesto della teoria della concorrenza, dove la concorrenza si assume sempre, o risulta essere, una relazione di tolleranza). Ma, è possibile fare di meglio? In altri termini, c'è un modo di definire la simultaneità (concorrenza) in ambito relativistico per ottenere un'equivalenza?

Risponderemo in modo negativo a questa domanda, facendo una breve digressione di teoria dei modelli. Si noti che queste osservazioni porteranno in modo naturale a considerare la tolleranza come l'unico serio candidato per la simultaneità in fisica (relativistica).

Per prima cosa, possiamo assumere che la *precedenza* nello spazio-tempo sia la sola relazione primitiva, da cui la simultaneità dovrebbe essere definita per mezzo di qualche costruzione logica. Nella precedente discussione, abbiamo definito la simultaneità precisamente come segue:

$$P \text{ co } Q \iff \neg(P < Q) \wedge \neg(Q < P) \wedge \exists R, R'. (P < R \wedge \neg(Q < R) \wedge Q < R' \wedge \neg(P < R')).$$

In ogni caso, la simultaneità è definita "in qualche modo" a partire dalla precedenza: ma che tipo di definibilità dovremmo ammettere? Possiamo restringerci alla definibilità al primo ordine, o considerare anche logiche di ordine superiore; citiamo le considerazioni che Van Benthem [Ben91] fa a questo proposito:

> Why all this fuss about 'first-order' versus 'higher-order'? Non-logicians are inclined to think that this is a mere logician's fad. Yet this would be a mistake. The borderline between the two is a philosophically significant one, as Quine has argued repeatedly. To mention just one aspect, second-order principles are much more sensitive to the 'set-theoretic investment' made in the background theory of our temporal structures. This shows in the independence proofs of set theory, where various 'real continua' may arise from the same Dedekind construction on the rationals, depending on the (kind of) subsets available for $\mathbb{R}$ in the set-theoretic universe. In using second-order principles we are not only discussing our temporal order, but also its super-imposed set-theoretic structure.

Alla luce di queste affermazioni, sembra ragionevole usare solo la logica del primo ordine per derivare relazioni non primitive da altre primitive (e, in particolare, per derivare la relazione di simultaneità a partire dalla precedenza).

Nelle sottosezioni che seguono, dimostreremo che, in effetti, non è possibile definire la simultaneità (nella struttura spazio-temporale) come una relazione di equivalenza.

Una breve digressione in teoria dei modelli

Prima di procedere nella nostra discussione, è richiesta una breve digressione di teoria dei modelli; non abbiamo alcuna pretesa di precisione in questa discussione, e rinviamo il lettore interessato alla letteratura specializzata su questo argomento per maggiori informazioni (si veda, per esempio, il Capitolo 5 di [BM76]).
Un *linguaggio del primo ordine* $\mathcal{L}$ è definito dai seguenti dati:

- una famiglia indicizzata $\langle \mathbf{R}_i \rangle_{i \in I}$ di simboli per predicati, ciascuno con una arità fissata $\lambda_i \in \omega$;
- una famiglia indicizzata $\langle \mathbf{c}_j \rangle_{j \in J}$ di simboli per costante;
- un insieme numerabile $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots\}$ di variabili.

Un $\mathcal{L}$-*termine* è o un simbolo per costante o una variabile. L'insieme delle $\mathcal{L}$-*formule* è allora definito ricorsivamente come segue:

- le formule atomiche sono della forma $\mathbf{R}_i(t_1, \dots, t_{\lambda_i})$ dove i t_k sono $\mathcal{L}$-termini;
- se ϕ, ψ sono $\mathcal{L}$-formule, allora anche $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$ e $\forall \mathbf{v}_n \phi$ sono formule.

Indichiamo con $FV(\phi)$ l'insieme delle variabili libere[11] della formula ϕ; diremo che ϕ è chiusa se $FV(\phi)$ è vuoto.

Una $\mathcal{L}$-*struttura* $\mathfrak{U}$ è definita da:

[11] Più formalmente, l'insieme delle variabili libere di una formula si può definire induttivamente come segue: le variabili libere di una formula atomica sono esattamente quelle variabili che compaiono nella formula; inoltre, $FV(\neg\phi) = FV(\phi)$, $FV(\phi \wedge \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$ ed infine $FV(\forall \mathbf{v}_n \phi) = FV(\phi) \setminus \{\mathbf{v}_n\}$.

- un insieme non vuoto U (chiamato "dominio" di $\mathfrak{U}$);
- una famiglia indicizzata $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ di relazioni su U, con R_i avente arità λ_i, cioè $R_i \subseteq U^{\lambda_i}$;
- una famiglia indicizzata $\langle c_j \rangle_{j \in J}$ di elementi di U (cioè, $c_j \in U$ per ogni $j \in J$), uno per ogni costante.

Spesso si dice che $\mathcal{L}$ è il linguaggio di $\mathfrak{U}$. Un *$\mathcal{L}$-assegnamento* α per la struttura $\mathfrak{U}$ è una funzione che mappa ogni variabile $\mathbf{v}_n$ in un elemento $\alpha(\mathbf{v}_n)$ (o, più semplicemente, α_n) di U.

L'*interpretazione* $\mathfrak{U}^\alpha(t)$ di un termine t nella struttura $\mathfrak{U}$, sotto l'assegnamento α, è definita come c_j se $t = \mathbf{c}_j$, e come α_k se $t = \mathbf{v}_k$.

Ora, la soddisfacibilità di una formula ϕ nella struttura $\mathfrak{U}$ (sotto l'assegnamento α), scritta $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$, è definita induttivamente come segue:

- $\mathfrak{U} \models_\alpha \mathbf{R}_i(t_1, \ldots, t_{\lambda_i})$ se e solo se la tupla $(\mathfrak{U}^\alpha(t_1), \ldots, \mathfrak{U}^\alpha(t_{\lambda_i}))$ appartiene a R_i;
- $\mathfrak{U} \models_\alpha \neg\phi$ se e solo se $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$ non vale;
- $\mathfrak{U} \models_\alpha (\phi \wedge \psi)$ se e solo se valgono sia $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$ che $\mathfrak{U} \models_\alpha \psi$;
- $\mathfrak{U} \models_\alpha \forall \mathbf{v}_n \phi$ se e solo se, per ogni $u \in U$, vale che $\mathfrak{U} \models_{\alpha[\mathbf{v}_n/u]} \phi$, dove $\alpha[\mathbf{v}_n/u]$ è l'assegnamento che coincide con α eccetto che per la variabile $\mathbf{v}_n$, che viene mappata in u.

È facile vedere che la validità di $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$ dipende solo dai valori assunti da α sull'insieme $FV(\phi)$. In altre parole, se $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$ vale, e se β è un altro assegnamento che coincide con α su ogni variabile libera di ϕ, allora anche $\mathfrak{U} \models_\beta \phi$. In virtù di quest'osservazione, possiamo usare un'abbreviazione: se ϕ contiene n variabili libere, scriveremo $\mathfrak{U} \models_{a_1, \ldots, a_n} \phi$ per intendere che $\mathfrak{U} \models_\alpha \phi$ vale ogni volta che il valore assunto da α sulla i-esima variabile[12] di ϕ è a_i ($i = 1, \ldots, n$). In particolare, se ϕ è una formula chiusa, scriveremo semplicemente $\mathfrak{U} \models \phi$, poiché la soddisfacibilità di formule chiuse non dipende dall'assegnamento.

Ora, ogni formula ϕ con n variabili libere definisce una relazione n-aria R^ϕ su U, nel seguente senso preciso:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^\phi \iff \mathfrak{U} \models_{a_1, \ldots, a_n} \phi.$$

Una relazione n-aria R nella struttura $\mathfrak{U}$ è *definibile (al primo ordine)* se esiste una formula ϕ, con n variabili libere, tale che $R = R^\phi$.

Ora, si consideri una relazione n-aria R su un insieme U, ed una biiezione $f : U \to U$; diremo che R è *invariante* rispetto ad f se e solo se, per ogni $(a_1, \ldots, a_n) \in U^n$

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R.$$

In particolare, un *automorfismo (di struttura)* per $\mathfrak{U}$ è una biiezione f del dominio di $\mathfrak{U}$ in se stesso tale che R_i sia invariante rispetto ad f (per ogni $i \in I$), e $f(c_j) = c_j$ per ogni $j \in J$. Il seguente risultato abbastanza banale di teoria dei modelli verrà utilizzato nel prosieguo:

[12] Prendiamo come ordinamento naturale fra le variabili quello indotto dai loro indici.

Teorema 2.2.1 *Sia $\mathfrak{U}$ una struttura, R una relazione n-aria che sia definibile in $\mathfrak{U}$, e f un automorfismo di $\mathfrak{U}$. Allora R è invariante rispetto ad f.*

Dimostrazione: Essendo R definibile, ci sarà una formula ϕ (con n variabili libere) tale che $R = R^{\phi}$. Procediamo per induzione sulla struttura di ϕ.

- Supponiamo che $\phi = \mathbf{R}_i(t_1, \ldots, t_m)$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\phi} \iff \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \mathbf{R}_i(t_1, \ldots, t_m) \\
&\iff (\mathfrak{U}^{a_1,\ldots,a_n}(t_1), \ldots, \mathfrak{U}^{a_1,\ldots,a_n}(t_m)) \in R_i \\
&\iff \text{(essendo } R_i \text{ invariante rispetto a } f\text{)}\ (\mathfrak{U}^{f(a_1),\ldots,f(a_n)}(t_1), \ldots, \mathfrak{U}^{f(a_1),\ldots,f(a_n)}(t_m)) \in R_i \\
&\iff \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} \mathbf{R}_i(t_1, \ldots, t_m) \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\phi}.
\end{aligned}
$$

- Supponiamo che $\phi = (\varphi \wedge \psi)$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\phi} \iff \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} (\varphi \wedge \psi) \\
&\iff \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \varphi \text{ e } \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \psi \\
&\iff (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\varphi} \text{ e } (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\psi} \\
&\iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\varphi} \text{ e } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\psi} \\
&\iff \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} \varphi \text{ e } \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} \psi \\
&\iff \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} (\varphi \wedge \psi) \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\phi}.
\end{aligned}
$$

- Supponiamo che $\phi = \neg\psi$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\phi} \iff \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \neg\psi \\
&\iff \text{non } \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \psi \iff (a_1, \ldots, a_n) \notin R^{\psi} \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \notin R^{\psi} \\
&\iff \text{non } \mathfrak{U} \models)_{f(a_1),\ldots,f(a_n)}\psi \iff \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} \neg\psi \\
&\iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\phi}.
\end{aligned}
$$

- Infine, supponiamo che $\phi = \forall \mathbf{x}\psi$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\phi} \iff \mathfrak{U} \models_{a_1,\ldots,a_n} \forall \mathbf{x}\psi \\
&\iff \text{for all } u \in U,\ \mathfrak{U} \models_{(a_1,\ldots,a_n)[\mathbf{x}/u]} \psi \iff (a_1, \ldots, a_n)[\mathbf{x}/u] \in R^{\psi};
\end{aligned}
$$

  ora, $(a_1, \ldots, a_n)[\mathbf{x}/u]$ è un vettore che coincide con $(a_1, \ldots, a_n)$, eccetto (eventualmente) per la posizione che corrisponde alla variabile libera $\mathbf{x}$ di ϕ, dove assume valore u. Ma allora:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n)[\mathbf{x}/u] \in R^{\psi} \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n))[\mathbf{x}/f(u)] \in R^{\psi} \\
&\iff \text{per ogni } u \in U,\ \mathfrak{U} \models_{(f(a_1),\ldots,f(a_n))[\mathbf{x}/u]} \psi \\
&\iff \text{(essendo } f \text{ biiettiva) per ogni } u \in U,\ \mathfrak{U} \models_{(f(a_1),\ldots,f(a_n))[\mathbf{x}/u]} \psi \\
&\iff \mathfrak{U} \models_{f(a_1),\ldots,f(a_n)} \forall \mathbf{x}\psi \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\phi}.
\end{aligned}
$$

Questo completa la dimostrazione. $\square$

La simultaneità relativistica non è una relazione di equivalenza

Con l'ausilio del Teorema 2.2.1, saremo ora in grado di dimostrare che nessuna relazione di equivalenza non banale è definibile al primo ordine nello spazio-tempo a partire solo dalla relazione di precedenza. Questo spiega perché la simultaneità precedentemente definita (che è una relazione non transitiva) è la miglior definizione possibile di concorrenza in un ambito relativistico. I nostri risultati sono effettivamente una variazione (ed una lieve generalizzazione) del Teorema I.2.1.5 di [Ben91].

Teorema 2.2.2 *Nessuna relazione di equivalenza non banale*[13] *è definibile al primo ordine sulla struttura* $(\mathbb{Q}, <)$ *(dove* $<$ *sia l'ordine lineare usuale fra razionali).*

Prima di dimostrare il Teorema 2.2.2, abbiamo bisogno del seguente

Lemma 2.2.1 *Siano* $q, q', q'' \in \mathbb{Q}$ *tre razionali distinti, con* $q' < q \iff q'' < q$. *Allora esiste un automorfismo* $f_q^{q' \to q''}$ *di* $(\mathbb{Q}, <)$ *tale che* $f_q^{q' \to q''}(q) = q$ *e* $f_q^{q' \to q''}(q') = q''$.

Dimostrazione: Si definisca $f = f_q^{q' \to q''}$ come segue:

$$f(x) = \frac{(q'' - q)x + (q' - q'')q}{q' - q}.$$

È immediato verificare che, sotto la condizione assunta su q, q', q'', si ha $x < y$ se e solo se $f(x) < f(y)$. Un controllo banale prova che in effetti $f(q) = q$ e $f(q') = q''$. □

Ora possiamo dare la dimostrazione del teorema:

Dimostrazione del Teorema 2.2.2: Sia $\sim$ una relazione di equivalenza definibile diversa dall'identità, e si supponga che $x \sim y$ e $x \neq y$ (diciamo, $x < y$). Per il Teorema 2.2.1, $\sim$ è invariante rispetto ad ogni automorfismo di $(\mathbb{Q}, <)$ e quindi, in particolare, rispetto all'automorfismo definito nel Lemma 2.2.1. Si prenda un qualsiasi $z \neq y$ con $x < z$: essendo $x \sim y$ si ha $f_x^{y \to z}(x) \sim f_x^{y \to z}(y)$, che significa $x \sim z$. Inoltre, per ogni $z < x$ si ha $f_y^{x \to z}(x) \sim f_y^{x \to z}(y)$, cioè $z \sim y$. Usando la transitività, si ottiene così che ogni punto è in $\sim$-relazione con x, e quindi $\sim$ è la relazione universale. □

Usando esattamente le stesse argomentazioni, si può mostrare che lo stesso accade per $(\mathbb{R}, <)$. Passiamo ora allo spazio di Minkowski bidimensionale, prendendo $\mathbb{Q}$ come campo soggiacente (ma lo stesso varrebbe se scegliessimo $\mathbb{R}$); questo è esattamente il Teorema I.2.1.5 di [Ben91], anche se la nostra dimostrazione è leggermente diversa, e usa il Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3 (Van Benthem [Ben91]) *Nessuna relazione di equivalenza non banale è definibile al primo ordine sulla struttura* $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <)$, *con* $<$ *definito componente per componente.*

Dimostrazione: Si osservi in primo luogo che, se f, g sono automorfismi di $(\mathbb{Q}, <)$, allora

$$\begin{array}{rccc} \langle f, g \rangle : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

[13] Una relazione di equivalenza è banale se è l'identità oppure la relazione universale.

è un automorfismo di $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <)$; infatti $(x, y) < (x', y')$ se e solo se $x < x'$ e $y < y'$, il che succede se e solo se $f(x) < f(x')$ e $g(x) < g(x')$, cioè $\langle f, g\rangle(x, y) < \langle f, g\rangle(x', y')$. Ora, combinando nei vari modi possibili la mappa identica $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ con gli automorfismi del Lemma 2.2.1, ed usando le stesse tecniche utilizzate nella dimostrazione del Teorema 2.2.2, si ottiene il risultato. $\square$

In conclusione, il modo che abbiamo usato per definire la simultaneità non è solo soddisfacente ed intuitivo, ma non c'è altro modo di definirla come una relazione di equivalenza partendo soltanto dalla causalità (precedenza) relativistica. In altri termini, la simultaneità è inevitabilmente una relazione di tolleranza propria (e non un'equivalenza), almeno se permettiamo solo quantificazioni sui punti dello spazio-tempo nel nostro metalinguaggio, come suggerisce la citazione di cui sopra.

Capitolo 3

Un'introduzione agli ordini parziali e ai domini

In questo capitolo, introdurremo alcune nozioni basilari di teoria dei domini. Alcuni dei risultati presentati qui sono piuttosto standard, e possono essere trovati per esempio nell'articolo di rassegna [GS90]; altri teoremi sono nuovi, e saranno utili nel seguito. Dimostreremo tutti i risultati non banali o che non possono essere trovati direttamente in letteratura.

3.1 Nozioni di base

Un *preordine* (o quasi-ordine) su un insieme P è una relazione $\sqsubseteq$ che sia riflessiva e transitiva. La coppia $\mathcal{P} = (P, \sqsubseteq)$ viene chiamata insieme preordinato; ogni volta che il contesto non crea ambiguità, useremo P (D) e $\sqsubseteq$ (eventualmente con speciali pedici) per denotare sia l'insieme e la relazione di preordine di un insieme preordinato $\mathcal{P}$ ($\mathcal{D}$, rispettivamente). Se $\sqsubseteq$ è anche antisimmetrica, cioè se

$$\forall x, y \in P.\, (x \sqsubseteq y \;\wedge\; y \sqsubseteq x) \implies x = y$$

allora diciamo che $\sqsubseteq$ è un *ordine (parziale)* su P, e che $\mathcal{P}$ è un insieme parzialmente ordinato (o più semplicemente, un *poset*). Se inoltre per ogni $x, y \in P$ vale $x \sqsubseteq y$ o $y \sqsubseteq x$, allora diciamo che $\sqsubseteq$ è un *ordine totale (o lineare)*.

La *relazione di copertura* associata a $\sqsubseteq$, di solito indicata con $\sqsubset\!\cdot$, viene definita ponendo $x \sqsubset\!\cdot y$ se e solo se

$$x \neq y \;\wedge\; x \sqsubseteq y \;\wedge\; \forall z.\, (x \sqsubseteq z \sqsubseteq y \implies x = z \vee z = y).$$

In altre parole, $\sqsubset\!\cdot\; = \sqsubseteq \setminus \sqsubseteq^2$; diremo che $\sqsubseteq$ è *combinatorio* se coincide con la chiusura riflessiva e transitiva di[1] $\sqsubset\!\cdot$.

Ora, sia $\mathcal{P}$ un poset, $X \subseteq P$ e $p \in P$; diremo che

- p è un *maggiorante* (minorante) per X, e scriveremo $X \sqsubseteq p$ ($p \sqsubseteq X$, rispettivamente), se e solo se $x \sqsubseteq p$ ($p \sqsubseteq x$, risp.) per ogni $x \in X$; se X ha un maggiorante (minorante),

[1] In generale, è solo contenuto in essa. Per esempio, il poset $\mathbb{Q}$ dei razionali rispetto al loro ordine naturale dà origine ad una relazione di copertura vuota.

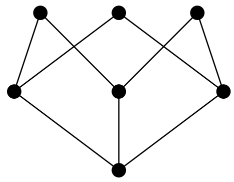


Figura 3.1: Un poset consistentemente completo ma non coerente

diciamo che è *compatibile* (inferiormente compatibile, risp.), e scriviamo $X \uparrow$ ($X \downarrow$, rispettivamente);

- p è l'*estremo inferiore* (superiore) di X, e scriviamo $p = \sqcup X$ ($p = \sqcap X$, risp.), se e solo se p è un maggiorante (minorante) di X e, se $p' \in P$ è un altro maggiorante (minorante) di X, allora $p \sqsubseteq p'$ ($p' \sqsubseteq p$, risp.); inoltre, se $p \in X$, diremo che p è il *massimo* (minimo, risp.) di X, e talvolta scriveremo $\max X$ ($\min X$) invece di $\sqcup X$ ($\sqcap X$);

- X è *diretto* se e solo se è non vuoto e per ogni $x, x' \in X$ esiste $x'' \in X$ tale che $\{x, x'\} \sqsubseteq x''$.

Seguendo l'uso comune, adotteremo le notazioni $x \uparrow y$, $x_1 \sqcup x_2 \sqcup \ldots \sqcup x_n$ e $x_1 \sqcap x_2 \sqcap \ldots \sqcap x_n$ come abbreviazioni di $\{x, y\} \uparrow$, $\sqcup\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\sqcap\{x_1, \ldots, x_n\}$, rispettivamente. Inoltre, per ogni $A \subseteq P$ indichiamo con $\downarrow A$ ($\uparrow A$) l'insieme dei minoranti (maggioranti, rispettivamente) di A (nel caso particolare che A sia un singoletto, ometteremo le parentesi graffe).

Un *precpo* (ordine parziale pre-completo) è un poset $\mathcal{P}$ tale che, per ogni $D \subseteq P$ che sia diretto, $\sqcup D$ esiste. In particolare, un *cpo* (ordine parziale completo) è un precpo che contiene un elemento minimo, solitamente indicato con $\perp$ e chiamato *bottom*.

Se ogni sottoinsieme compatibile di P possiede un estremo superiore, diremo che il poset è *consistentemente completo* (oppure Dedekind-completo). Una condizione ancora più forte è la coerenza; un sottoinsieme $X \subseteq P$ è detto *compatibile a coppie* se e solo se per ogni coppia di elementi $x, y \in X$ accade che $x \uparrow y$. Se ogni sottoinsieme di P compatibile a coppie ha un estremo superiore, diciamo che il poset è *coerente*. Si noti che ovviamente ogni poset coerente è consistentemente completo (perché un insieme compatibile è *a fortiori* compatibile a coppie), ma il viceversa non è generalmente vero, come testimoniato dal poset rappresentato[2] in Fig. 3.1.

È abbastanza facile dimostrare che, se $\mathcal{P}$ è un poset consistentemente completo, allora ogni sottoinsieme non vuoto ha un estremo inferiore: questo accade poiché l'estremo inferiore di un insieme è semplicemente l'estremo superiore dell'insieme dei suoi minoranti.

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono due cpo, diremo che una funzione $f : P \to P'$ è

- *monotòna* se $x \sqsubseteq y$ implica $f(x) \sqsubseteq f(y)$ (cioè, se f è un omomorfismo di poset);

[2]Un poset si rappresenta di solito mediante il suo diagramma di Hasse; in un diagramma di Hasse, gli elementi sono indicati come punti, e $x \sqsubseteq y$ vale se e solo se c'è un percorso diretto verso l'alto dal punto che rappresenta x al punto che rappresenta y. Più precisamente, il diagramma di Hasse è un modo convenzionale per rappresentare la relazione di copertura associata all'ordine parziale.

- *continua* se è monotona e inoltre, per ogni insieme diretto $D \subseteq P$, vale che $f(\sqcup D) = \sqcup f(D)$ (il membro sinistro è ben definito, poiché $f(D) = \{f(d), d \in D\}$ è evidentemente un sottoinsieme diretto di P', se f è monotona);
- *stretta* se $f(\bot) = \bot'$;
- un *isomorfismo* se è monotona e esiste una funzione monotona $g : P' \to P$ tale che $g \circ f = \mathbf{1}_P$ e $f \circ g = \mathbf{1}_{P'}$; oppure, in modo equivalente, se f è una biiezione e per ogni coppia di elementi $x, y \in P$ vale che $x \sqsubseteq y \iff f(x) \sqsubseteq' f(y)$;
- *additiva* se, ogni volta che $x \sqcup y$ esiste, anche $f(x) \sqcup f(y)$ esiste, e $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$.

Si osservi che è possibile definire una relazione d'ordine fra funzioni: date due funzioni $f, g : P \to P'$, si ponga $f \sqsubseteq g$ se e solo se $f(x) \sqsubseteq g(x)$ vale per ogni $x \in P$. Questa relazione è chiamata ordinamento *punto-a-punto* delle funzioni. Denotiamo abitualmente il poset delle funzioni continue (strette e continue, risp.) fra due poset $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ (rispetto all'ordine punto-a-punto sopra definito) con la notazione $[\mathcal{P} \to \mathcal{P}']$ (rispettivamente: $[\mathcal{P} \to_\bot \mathcal{P}']$).

Sia $\mathcal{P}$ un cpo; un elemento $x \in P$ è detto *compatto* (o isolato) se e solo se per ogni insieme diretto $D \subseteq P$ vale che

$$x \sqsubseteq \sqcup D \implies \exists d \in D.\, x \sqsubseteq d.$$

Normalmente la proprietà di compattezza di un elemento viene interpretata come una proprietà di "finitezza" (cioè, un elemento compatto viene pensato come un'approssimazione finita di un elemento con un contenuto informativo infinito). Infatti, possiamo pensare che l'ordine descriva il contenuto informativo di ciascun elemento: un punto isolato x è un punto che contiene solo un quantitativo finito di informazione, poiché ogni volta che possiamo mettere insieme tutta l'informazione di x, lo possiamo anche fare in modo finito.

L'insieme degli elementi compatti di P si denota con P°; definiamo, per ogni elemento x di P, l'insieme $K(x) = \downarrow x \cap P^\circ$ delle approssimazioni compatte di x. Il cpo $\mathcal{P}$ è *algebrico* se e solo se per ogni $x \in P$, l'insieme $K(x)$ risulta diretto, e inoltre $\sqcup K(x) = x$. È *ω-algebrico* se inoltre P° è al più numerabile.

Un *dominio* è un cpo algebrico; è un *dominio di Scott* se è anche consistentemente completo. Presentiamo ora alcune proprietà che riguardano le relazioni fra elementi compatti e continuità di funzioni fra domini:

Proprietà 3.1.1 *Siano $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ due domini:*

1. *una funzione continua è univocamente determinata dalla sua restrizione all'insieme degli elementi compatti; in altre parole, se $f, g : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ sono continue e $f(d) = g(d)$ per ogni $d \in D_0^\circ$, allora $f = g$;*
2. *una funzione $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ è continua*[3] *se e solo se per ogni $x \in D_0$ e ogni $b \in D_1^\circ$*

$$b \sqsubseteq_1 f(x) \iff \exists a \in K(x).\, b \sqsubseteq_1 f(a);$$

[3]Questa è anche nota come $\epsilon - \delta$ continuità; infatti, possiamo interpretarla in modo informale come segue: se b è un'approssimazione finita di $f(x)$ allora c'è un'approssimazione finita a di x la cui immagine è anch'essa approssimata da b. In altre parole, è sempre possibile trovare un input abbastanza approssimato per una funzione continua se ci si accontenta di un risultato approssimato.

3. *per ogni funzione monotona* $f : D_0^\circ \to D_1^\circ$ *esiste esattamente una funzione continua* $h : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ *che estenda* f.

Dimostrazione: (1) Sia $x \in D_0$; risulta che $x = \sqcup K(x)$, e quindi $f(x) = f(\sqcup K(x))$. Essendo f continua, vale che $f(x) = \sqcup f(K(x))$. Ma f e g coincidono sugli elementi compatti, e quindi $f(K(x)) = g(K(x))$, da cui segue che $f(x) = \sqcup g(K(x)) = g(\sqcup K(x)) = g(x)$, come richiesto.
(2) Supponiamo prima che f sia continua; il solo verso non banale è $\Longrightarrow$ (essendo l'altro una conseguenza immediata della monotonia). Ora, $b \sqsubseteq_1 f(\sqcup K(x)) = \sqcup f(K(x))$, b è compatto e $f(K(x))$ è un sottoinsieme diretto di D_1, per cui ci deve essere un elemento $f(a)$ (con $a \sqsubseteq_0 x$ e a compatto) tale che $b \sqsubseteq_1 f(a)$, come richiesto.
Per il viceversa, dimostriamo in primo luogo che f è monotona. Si supponga che $x \sqsubseteq_0 y$: se b è isolato in D_1 e tale che $b \sqsubseteq_1 f(x)$, allora c'è qualche $a \in K(x)$ tale che $b \sqsubseteq_1 f(a)$. Ma $a \sqsubseteq_0 y$ e $b \sqsubseteq_1 f(a)$, e quindi $b \sqsubseteq_1 f(y)$ (utilizzando l'implicazione $\Longleftarrow$ dell'ipotesi). Quindi, per ogni compatto b si ha $b \sqsubseteq_1 f(x) \implies b \sqsubseteq_1 f(y)$, cioè $K(f(x)) \subseteq K(f(y))$, e quindi $f(x) \sqsubseteq_1 f(y)$. A questo punto, usando l'algebricità, si ottiene che f deve essere monotona. La continuità si dimostra in modo analogo.
(3) Si definisca $h(x) = \sqcup f(K(x))$, che è ben definito, essendo $\mathcal{D}_0$ algebrico e f monotona; chiaramente h estende f (poiché, se d è compatto, risulta $f(d) \in f(K(d))$ e quindi $h(d) = f(d)$). Per dimostrare che h è continua, useremo la $\epsilon - \delta$ continuità. Sia $x \in D_0$ e $b \in D_1^\circ$; essendo h monotona, solo l'implicazione $\Longrightarrow$ richiede una dimostrazione. Se $b \sqsubseteq_1 h(x) = \sqcup f(K(x))$ allora, essendo b compatto, deve esistere qualche elemento compatto $a \in K(x)$ tale che $b \sqsubseteq_1 f(a)$, come richiesto. $\square$

Una nozione molto utile in teoria dei domini è quella di ideale, che permette di completare un poset al fine di ottenere un dominio. Sia $\mathcal{P}$ un poset con minimo elemento $\perp$; un *ideale (diretto)* di $\mathcal{P}$ è un insieme $I \subseteq P$ tale che

1. I è diretto;

2. I è chiuso verso il basso, cioè $\downarrow I = I$ (ovvero, equivalentemente, se $x \in I$ e $y \sqsubseteq x$ allora anche $y \in I$).

In particolare, per ogni $x \in P$, l'insieme $\downarrow x$ è un ideale di $\mathcal{P}$, chiamato l'*ideale principale* generato da x. L'insieme degli ideali di $\mathcal{P}$ sarà indicato con $\mathrm{Idl}(P)$, e la stessa notazione verrà talvolta usata per indicare il corrispondente poset ordinato rispetto all'inclusione, che viene chiamato di solito "completamento per ideali" di $\mathcal{P}$.

Il seguente risultato spiega perché gli ideali giocano un ruolo così importante nella teoria dei domini:

Teorema 3.1.1 *Dato un poset* $\mathcal{P}$ *con minimo, il poset* $Idl(P)$ *è un dominio i cui elementi compatti sono esattamente gli ideali principali di* $\mathcal{P}$. *Viceversa, se* $\mathcal{D}$ *è un dominio, il poset* $Idl(D^\circ)$ *è isomorfo a* $\mathcal{D}$.

Dimostrazione: Per la prima parte, ovviamente $\mathrm{Idl}(P)$ ha come minimo $\{\perp\}$. Se $S \subseteq \mathrm{Idl}(P)$ è un insieme diretto, dimostriamo che $I = \cup S$ è un ideale (e quindi è l'estremo superiore di S). Si supponga che $x \in I$ e $y \sqsubseteq x$; allora $x \in J$ per qualche $J \in S$, e perciò $y \in J \subseteq I$.

Ora, supponiamo che $x, y \in I$; allora $x \in J, y \in J'$ dove $J, J' \in S$. Ma S è diretto, e quindi c'è un $J'' \in S$ tale che $x, y \in J''$. L'insieme J'' è diretto, e quindi esiste $z \in J'' \subseteq I$ tale che $\{x, y\} \sqsubseteq z$, come richiesto.
Per quanto riguarda gli elementi compatti, se $\downarrow x \subseteq \cup S$, dove S è diretto, in particolare si avrà $x \in \cup S$ e quindi $\downarrow x$ sarà incluso in qualche elemento di S. Viceversa, si supponga che I sia un ideale compatto, e sia S l'insieme degli ideali principali generati dagli elementi di I. Questo insieme è orientato (infatti, se $\downarrow x, \downarrow y \in S$, allora $x, y \in I$, e quindi c'è qualche $z \in I$ per cui $\downarrow x \subseteq \downarrow z$ e $\downarrow y \subseteq \downarrow z$), e ovviamente $\cup S = I$; quindi c'è un elemento di S in cui I sia incluso, e perciò I è un ideale principale. Il fatto che $\mathrm{Idl}(P)$ sia algebrico segue immediatamente da questa stessa osservazione.
Per la seconda parte, si consideri l'usuale funzione K che mappa ogni elemento di D nell'insieme dei compatti che sono minori o uguali a quell'elemento. Questa funzione è iniettiva, poiché, per algebricità, $K(x) = K(y)$ implica $\sqcup K(x) = \sqcup K(y)$ e quindi $x = y$. È anche suriettiva: se I è un ideale, si ponga $x = \sqcup I$ (che esiste, essendo I diretto). Chiaramente $K(x) = I$. Quindi K è un isomorfismo. □

Questo teorema in particolare implica che ogni dominio è unicamente determinato dal poset dei suoi elementi compatti, dal quale può essere completamente ricostruito mediante completamento per ideali.

3.2 Funzioni stabili, ordine di Berry e domini dI

Torniamo per un momento alla versione $\epsilon - \delta$ della continuità (Proprietà 3.1.1); ricordiamo che una funzione $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ è continua se e solo se per ogni $x \in D_0$ e $b \in D_1^\circ$

$$b \sqsubseteq_1 f(x) \iff \exists a \in K(x).\, b \sqsubseteq_1 f(a).$$

In altri termini, dato un qualsiasi input x e una qualunque approssimazione finita b dell'output determinato da x, esiste un'approssimazione finita dell'input che fornisce un'approssimazione dell'output "non peggiore" di b.

Il problema qui è che non esiste un modo *canonico* per scegliere a: vorremmo poter scegliere il minimo input possibile che soddisfi la condizione, ma in generale non c'è alcun motivo perché tale input esista. In altri termini, vorremmo avere un minimo elemento finito $M(f, x, b)$ che non sia maggiore di x e la cui immagine (rispetto a f) non sia minore di b. Formalizzeremo ora questa idea, e dimostreremo che è equivalente ad una condizione molto più semplice di preservazione degli estremi inferiori di elementi compatibili.

Si consideri una funzione continua $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$; diremo che f soddisfa la *proprietà di modulo minimo* se e solo se per ogni $x \in D_0$ e $y \in K(f(x))$, l'insieme[4]

$$A(f, x, y) = \{e \in K(x) : y \sqsubseteq f(e)\}$$

ha minimo, denotato da $M(f, x, y)$.

Saremo interessati a considerare funzioni stabili fra domini di tipo molto particolare, i cosiddetti "domini dI". Un dominio $\mathcal{D}$ è *finitario* se e solo se $K(x)$ è finito per ogni $x \in D^\circ$; un esempio di dominio non finitario è rappresentato dall'ordinale $\omega + 2$ (vedi Fig. 3.2): questo è chiaramente un dominio i cui elementi compatti sono tutti gli ordinali finiti più l'elemento $\omega + 1$, che domina infiniti compatti.

[4]Si noti che questo insieme non è vuoto, a causa della Proprietà 3.1.1 ($\epsilon - \delta$ continuità).

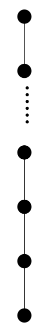


Figura 3.2: L'ordinale $\omega + 2$

Un dominio $\mathcal{D}$ è *distributivo* se e solo se, comunque scelti tre elementi $x, y, z \in D$, se $y \uparrow z$ allora $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$. Un dominio di Scott finitario distributivo è spesso chiamato *dominio dI*, un termine introdotto da Berry in [Ber79].

Nel caso di domini dI, possiamo dare una definizione che è equivalente alla proprietà di modulo minimo:

Lemma 3.2.1 *Sia $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ una funzione continua fra domini dI. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f soddisfa la proprietà di modulo minimo;*

2. *per ogni $x, x' \in D_0$, se $x \uparrow x'$ allora $f(x \sqcap x') = f(x) \sqcap f(x')$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è semplice ma piuttosto lunga. Rinviamo il lettore interessato a [BG92], Proposition 3.10. □

Una funzione che sia continua e soddisfi la condizione (le condizioni) del Lemma 3.2.1 è detta *stabile*. La nozione di stabilità fu introdotta da Berry [Ber78], con lo scopo di generalizzare la nozione di sequenzialità ai tipi superiori.

Una domanda naturale che ci possiamo porre è se possiamo usare la proprietà di modulo minimo per definire una nuova nozione di "ordine" fra le funzioni stabili, che sia più fine di quella data dall'ordine punto-a-punto. Si supponga che $f, g : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ siano due funzioni stabili, con $f \sqsubseteq g$ (rispetto all'ordine punto-a-punto): intuitivamente, questo significa che f è un'approssimazione di g, nel senso che fornisce sempre un output che è un'approssimazione di quello dato da g per lo stesso input.

Sia ora $x \in D_0$ e $y \in K(f(x))$: esisterà una minima approssimazione $M(f, x, y)$ dell'input x che fornisce un output approssimato da y. Naturalmente, $M(g, x, y) \sqsubseteq M(f, x, y)$, poiché g dà sempre output migliori (non peggiori) di f, ma potrebbe succedere che un'approssimazione più rozza sia sufficiente per ottenere da g lo stesso risultato. Se questo non accade, cioè se

$$f \sqsubseteq g \text{ e } \forall x \in D_0, y \in K(f(x)).\, M(f, x, y) = M(g, x, y)$$

diremo che f è stabilmente minore di g, e scriveremo $f \sqsubseteq_s g$. In effetti, $\sqsubseteq_s$ può essere caratterizzata per i domini dI nel seguente modo:

Lemma 3.2.2 *Per due qualsiasi funzioni stabili $f, g : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ fra domini dI, con $f \sqsubseteq g$,*

$$f \sqsubseteq_s g \iff (\forall x', x \in D_0.\, x' \sqsubseteq x \implies f(x') = f(x) \sqcap g(x')).$$

Dimostrazione: Una dimostrazione è data in [BG92], Proposition 4.7. □

La relazione $\sqsubseteq_s$ è in effetti un ordine parziale (detto *ordine di Berry*) che raffina quello punto-a-punto, come mostrato nella seguente

Proprietà 3.2.1 *$\sqsubseteq_s$ è un ordine parziale, e $f \sqsubseteq_s g$ implica $f \sqsubseteq g$.*

Dimostrazione: Si noti in primo luogo che, se $f \sqsubseteq_s g$, per ogni $a \in D_0$, $f(a) = f(a) \sqcap g(a) \sqsubseteq g(a)$. Quindi $f \sqsubseteq_s g$ implica $f \sqsubseteq g$. La riflessività è ovvia: se $a' \sqsubseteq a$ allora $f(a') \sqsubseteq f(a)$ e quindi $f(a') = f(a) \sqcap f(a')$. Per la proprietà di antisimmetria, si supponga che $f \sqsubseteq_s g$ e $g \sqsubseteq_s f$, e si scelga un qualsiasi $a \in D_0$: si ha $f(a) = f(a) \sqcap g(a)$ e $g(a) = g(a) \sqcap f(a)$, perciò $f(a) = g(a)$. Per la transitività, supponete che $f \sqsubseteq_s g$ e $g \sqsubseteq_s h$, e sia $a' \sqsubseteq a$: allora deve essere $f(a') = f(a) \sqcap g(a') = f(a) \sqcap g(a) \sqcap h(a')$ che è a sua volta uguale a $f(a) \sqcap h(a')$, poiché $f \sqsubseteq_s g \implies f \sqsubseteq g$. □

L'insieme delle funzioni stabili da $\mathcal{D}_0$ a $\mathcal{D}_1$, ordinate mediante l'ordine di Berry, verrà indicato come $[\mathcal{D}_0 \to_s \mathcal{D}_1]$.

3.3 Coppie immersione-proiezione stabili

È possibile definire una nozione di immergibilità che si può interpretare come una relazione di approssimazione fra domini, più o meno nello stesso modo in cui la relazione d'ordine di un dominio viene interpretata come una relazione di approssimazione fra i (contenuti informativi dei) suoi elementi.

Il modo usuale per fare questo consiste nel definire le cosiddette "coppie immersione-proiezione". Una *coppia immersione-proiezione* (o EPP, dall'inglese "embedding-projection pair") fra due domini $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ è una coppia di funzioni $\langle f, g \rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$, dove $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ (l'"immersione") e $g : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_0$ (la "proiezione") sono entrambe funzioni continue, e soddisfano le proprietà $g \circ f = \mathbf{1}_{\mathcal{D}_0}$ e $f \circ g \sqsubseteq \mathbf{1}_{\mathcal{D}_1}$. Si noti che:

Proprietà 3.3.1 *Sia $\langle f, g \rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ una coppia immersione-proiezione. Allora f è iniettiva, g è suriettiva ed entrambe sono strette.*

Dimostrazione: Se $f(x) = f(y)$ allora anche $g(f(x)) = g(f(y))$ e (essendo $g \circ f = \mathbf{1}$) $x = y$. Sia ora $x \in D_0$; si ha $g(f(x)) = x$ e quindi $x \in g(D_1)$. Perciò g è suriettiva. Per la strettezza di f, si osservi che $\bot_1 \sqsubseteq_1 f(\bot_0)$, che implica $f(g(\bot_1)) = \bot_1$, e quindi, essendo $\bot_0 \sqsubseteq_0 g(\bot_1)$, si ha anche $f(\bot_0) = \bot_1$. Inoltre, $g(\bot_1) = g(f(\bot_0)) = \bot_0$, e quindi g è anch'essa stretta. □

Saremo principalmente interessati a considerare una versione specializzata di questa nozione, introdotta da Kahn e Plotkin in [KP78] (vedi anche Curien [Cur86]). Una coppia immersione-proiezione $\langle f, g \rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ è una *coppia immersione-proiezione stabile* (abbreviata in SEPP) se inoltre, per ogni $x_0 \in D_0$ e $x_1 \in D_1$, se $x_1 \sqsubseteq_1 f(x_0)$ allora $x_1 = f(g(x_1))$.

C'è una relazione stretta fra le coppie immersione-proiezione stabili, l'ordine di Berry e la stabilità di funzioni, che viene chiarita dal seguente

Lemma 3.3.1 *Sia $\langle e, p\rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ una coppia immersione-proiezione. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\langle e, p\rangle$ è una coppia immersione-proiezione stabile;*

2. *e e p sono stabili, e $e \circ p \sqsubseteq_s \mathbf{1}$.*

Dimostrazione: (1) $\implies$ (2) Dimostreremo per prima cosa che p è stabile; supponete che $y, y' \in D_1$ con $y \uparrow y'$. Per monotonia, $p(y \sqcap y') \sqsubseteq p(y) \sqcap p(y')$, perciò dobbiamo solo dimostrare il viceversa. Ancora usando la monotonia otteniamo $e(p(y) \sqcap p(y')) \sqsubseteq e(p(y)) \sqsubseteq y$, ed analogamente $e(p(y) \sqcap p(y')) \sqsubseteq y'$, quindi

$$e(p(y) \sqcap p(y')) \sqsubseteq y \sqcap y'.$$

Ora, applicando p ad entrambi i membri, e usando il fatto che $p \circ e = \mathbf{1}$, si ottiene $p(y) \sqcap p(y') \sqsubseteq p(y \sqcap y')$.
Per dimostrare la stabilità di e, siano $x, x' \in D_0$ con $x \uparrow x'$. Dobbiamo dimostrare che $e(x) \sqcap e(x') = e(x \sqcap x')$. Si noti che $e(x) \sqsubseteq e(x \sqcup x')$ ed anche $e(x') \sqsubseteq e(x \sqcup x')$; quindi otteniamo $e(x) \sqcap e(x') \sqsubseteq e(x \sqcup x')$, e perciò, usando la definizione di coppia immersione-proiezione stabile, $e(x) \sqcap e(x') = e(p(e(x) \sqcap e(x')))$ che, per stabilità di p, è uguale a $e(p(e(x)) \sqcap p(e(x'))) = e(x) \sqcap x')$.
Dovremmo ora mostrare che $e \circ p \sqsubseteq_s \mathbf{1}$. Supponete che $y, y' \in D_1$ con $y \uparrow y'$. Chiaramente $e(p(y')) \sqsubseteq e(p(y)) \sqcap y'$, e quindi dobbiamo solo dimostrare il viceversa. Supponete allora che $y'' \sqsubseteq e(p(y)) \sqcap y'$: per definizione di coppia immersione-proiezione stabile, $y'' \sqsubseteq e(p(y))$ implica $y'' = e(p(y''))$ e perciò, per monotonia di $e \circ p$, otteniamo $y'' \sqsubseteq e(p(y'))$. Ne segue che $y'' \sqsubseteq e(p(y)) \sqcap y'$ implica $y'' \sqsubseteq e(p(y'))$, e questo conclude la dimostrazione.
(2) $\implies$ (1) Si supponga che $y \sqsubseteq e(x)$. Allora, essendo $e \circ p \sqsubseteq_s \mathbf{1}$, si ha $(e \circ p)(y) = (e \circ p)(e(x)) \sqcap y$, cioè $e(p(y)) = e(p(e(x))) \sqcap y = e(x) \sqcap y = y$. $\square$

Quindi, possiamo dire semplicemente che le SEPP sono semplici coppie immersione-proiezione a patto che si considerino solo funzioni stabili (e non semplicemente continue), e che si usi l'ordine di Berry (al posto dell'ordine punto-a-punto).

Si può definire la composizione di due coppie immersione-proiezione (stabili) $\langle f, g\rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ e $\langle f', g'\rangle : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ come la coppia $\langle f' \circ f, g \circ g'\rangle$: un controllo di routine mostra che questa è effettivamente una (S)EPP.

C'è una stretta relazione fra le coppie immersione-proiezione stabili e speciali sottoinsiemi di domini di Scott chiamati "ideali forti". Se $\mathcal{D}$ è un dominio di Scott, un *ideale forte* $X \subseteq D$ è un insieme che soddisfi le seguenti proprietà:

1. X è non vuoto, e chiuso verso il basso;

2. se $x, y \in X$ e $x \uparrow y$, allora $x \sqcup y \in X$; in altre parole, X è chiuso rispetto agli estremi superiori di sottoinsiemi finiti (compatibili);

3. se $S \subseteq X$ è diretto, allora $\sqcup S \in X$; cioè X è chiuso rispetto agli estremi superiori di sottoinsiemi diretti.

Una proprietà importante degli ideali forti è la seguente (per una dimostrazione alternativa, si veda Kahn e Plotkin [KP78], Proposition P-8.6):

Proprietà 3.3.2 *Sia X un ideale forte del dominio di Scott $\mathcal{D}$. Allora X, con l'ordine ereditato da $\mathcal{D}$, è anch'esso un dominio di Scott, che è coerente se $\mathcal{D}$ lo era, i cui elementi compatti sono esattamente gli elementi compatti di $\mathcal{D}$ che sono contenuti in X.*

Dimostrazione: X contiene $\perp$, che è il suo minimo elemento (questo segue dal fatto che X è non vuoto e chiuso verso il basso). Se $S \subseteq X$ è diretto, allora $\sqcup S \in X$ e quindi X è un cpo.
Si supponga ora che $x \in X \cap D^\circ$: dimostriamo che x è compatto anche in X. Se $S \subseteq X$ è diretto e $x \sqsubseteq \sqcup_X S = \sqcup_D S$, allora $x \sqsubseteq s$ per qualche $s \in S$, poiché $x \in D^\circ$. Al contrario, si supponga che x sia compatto in X: dimostriamo che è compatto anche in D. Sia $S \subseteq D$ diretto con $x \sqsubseteq \sqcup S$, e sia $T = \{a \in X : \exists s \in S.\, a \sqsubseteq s\}$. T è diretto: se $a, b \in T$ allora esistono $s, s' \in S$ con $a \sqsubseteq s$ e $b \sqsubseteq s'$; essendo S diretto, c'è un $s'' \in S$ tale che $\{a, b\} \sqsubseteq s''$, perciò $a \uparrow b$ e quindi $a \sqcup b \in T$. Ora $x \sqsubseteq \sqcup S$ implica che $x \sqsubseteq s$ vale per ogni $s \in S$. Quindi $x \in T$ e perciò $x \sqsubseteq \sqcup T$. Ma x è compatto in X, da cui segue che $x \sqsubseteq a$ per qualche $a \in T$. Quindi $x \in D^\circ$.
A questo punto è facile dimostrare l'algebricità. Per ogni $x \in X$, l'insieme $K_X(x) = K(x) \cap X$ è diretto: così $\sqcup K_X(x) = \sqcup(K(x) \cap X) = x$, come richiesto. Per dimostrare che X è consistentemente completo, sia $A \sqsubseteq X$ un insieme compatibile, e si prenda $B = \downarrow (\sqcup A) \cap X$: questo insieme è diretto e quindi $\sqcup B \in X$; ma allora $\sqcup B = \sqcup A$. (Per la coerenza, la dimostrazione è analoga). □

La relazione sopra menzionata fra gli ideali forti e le SEPP si può esprimere mediante la seguente

Proposizione 3.3.1 ([BCS93]; vedi anche [KP78]) *Se $\langle f, g\rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ è una coppia immersione-proiezione stabile fra domini di Scott, allora $f(D_0)$ è un ideale forte di $\mathcal{D}_1$. Viceversa, se X è un ideale forte di $\mathcal{D}$, l'inclusione $i : X \hookrightarrow D$ e la funzione $p : D \to X$ definita da*

$$p(d) = \sqcup(K(d) \cap X)$$

costituisce una coppia immersione-proiezione stabile $\langle i, p\rangle$ da X (con l'ordinamento ereditato da $\mathcal{D}$) a D.

Dimostrazione: Prima parte. Per la chiusura verso il basso, se $y \sqsubseteq_1 f(x)$ allora per stabilità $y = f(g(y))$ e quindi $y \in f(D_0)$. Si supponga ora che $f(x) \uparrow f(y)$ in $\mathcal{D}_1$. Sia allora $z = f(g(f(x) \sqcup_1 f(y)))$; essendo $f \circ g \sqsubseteq \mathbf{1}$, avremo $z \sqsubseteq_1 f(x) \sqcup_1 f(y)$. Ma $f(x) \sqsubseteq_1 f(x) \sqcup f(y)$ e quindi $g(f(x)) \sqsubseteq_0 g(f(x) \sqcup f(y)$ (essendo g monotona) ed infine $f(g(f(x))) \sqsubseteq_1 z$ (essendo f monotona), il che significa che $f(x) \sqsubseteq_1 z$; analogamente, anche $f(y) \sqsubseteq_1 z$ e così $f(x) \sqcup f(y) \sqsubseteq_1 z$. Quindi, infine, $z = f(x) \sqcup f(y)$, e $z \in f(D_0)$. Si supponga ora che $S \subseteq f(D_0)$ sia diretto; esattamente nello stesso modo si dimostra che $\sqcup_1 S = f(g(\sqcup_1 S))$, e quindi $f(D_0)$ è un ideale forte.
Seconda parte. L'inclusione è chiaramente continua, e lo stesso vale per p. Ora $p(i(x)) = p(x) = \sqcup(K(x) \cap X) = x$ e viceversa $i(p(x)) = \sqcup(K(x) \cap X) \sqsubseteq \sqcup K(x) = x$. Infine, la stabilità segue dalla chiusura verso il basso di X. □

Poiché le immersioni sono iniettive, la prima parte della Proposizione 3.3.1 dice semplicemente che, se $\langle f, g\rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ è una coppia immersione-proiezione stabile, allora $f(D_0)$ è isomorfo (via f) ad un ideale forte di $\mathcal{D}_1$: infatti, se $f(x) \sqsubseteq f(y)$, allora $g(f(x)) \sqsubseteq g(f(y))$ e perciò $x \sqsubseteq y$.

Nel caso di domini coerenti, le SEPP possono essere caratterizzate in un modo molto semplice:

Lemma 3.3.2 (Vedi [BCS93]) *Siano $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ domini coerenti, e $f : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ sia una iniezione continua additiva che soddisfi le seguenti condizioni:*

1. *se $f(x) \uparrow f(x')$ allora $x \uparrow x'$;*
2. *per ogni $y \in D_1$ ed ogni $x \in D_0$, se $y \sqsubseteq f(x)$ allora $y = f(x')$ per qualche $x' \in D_0$.*

Allora f è un'immersione stabile, cioè esiste $g : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_0$ tale che $\langle f, g\rangle$ è una coppia immersione-proiezione stabile.

Dimostrazione: È immediato verificare che f è un isomorfismo fra D_0 e $f(D_0) \subseteq D_1$. Infatti, se $f(x) \sqsubseteq f(y)$ allora $f(x) \uparrow f(y)$ e quindi, per la prima condizione, $x \uparrow y$. Ma allora, per additività, $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y)$ e quindi, per iniettività, $x \sqcup y = y$, cioè $x \sqsubseteq y$. Inoltre, $f(D_0)$ è un ideale forte di $\mathcal{D}_1$, e quindi il risultato può essere ottenuto usando la Proprietà 3.3.1. Infatti, la coppia $\langle i, p\rangle : f(D_0) \to D_1$ è anch'essa una SEPP (in effetti, un isomorfismo). Quindi, la loro composizione $\langle i \circ f, f^{-1} \circ p\rangle$ è una SEPP (si noti che l'immersione è in realtà $i \circ f = f$). □

La seguente proposizione, infine, esplora la struttura dei completamenti per ideali che sono ideali forti di un dominio di Scott.

Proposizione 3.3.2 (Vedi [BCS93], Proposition 2.2.4) *Sia $\mathcal{P}$ un poset consistentemente completo con minimo, e X un sottoinsieme non vuoto di P tale che:*

1. *X è chiuso verso il basso;*
2. *se $x, y \in X$ e $x \uparrow y$, allora $x \sqcup y \in X$.*

Il dominio $Idl(X)$ è un ideale forte di $Idl(P)$. □

3.4 Atomicità e domini dI

C'è una speciale proprietà che riguarda gli ideali forti di domini dI, osservata per la prima volta in [BCS93], e che è un adattamento della dimostrazione della Proposition 2.3.7 di Curien [Cur86].

Proprietà 3.4.1 *Sia $\mathcal{D}$ un dominio dI, e X un ideale forte di $\mathcal{D}$. Allora X, con l'ordine ereditato, è anch'esso un dominio dI, i cui compatti sono precisamente i compatti di $\mathcal{D}$ che sono contenuti in X.*

Dimostrazione: Già sappiamo dalla Proprietà 3.3.2 che X è un dominio di Scott e $X^\circ = D^\circ \cap X$; quindi il dominio è anche finitario. La distributività è banale. □

In un dominio di Scott $\mathcal{D}$, un elemento d è un *primo completo* se e solo se, per ogni insieme compatibile $X \subseteq D$ vale che

$$d \sqsubseteq \sqcup X \implies \exists x \in X.\, d \sqsubseteq x.$$

L'insieme dei primi completi verrà indicato con $\mathrm{Pr}(D)$. Diciamo che $\mathcal{D}$ è *algebrico primo* se e solo se $x = \sqcup K^P(x)$ vale per ogni $x \in D$, dove

$$K^P(x) = \{d \in \mathrm{Pr}(D) : d \sqsubseteq x\}.$$

Il seguente teorema dà una relazione precisa fra questa nozione e la distributività nei domini di Scott finitari:

Teorema 3.4.1 (Winskel [Win87]) *Sia $\mathcal{D}$ un dominio di Scott finitario. Allora $\mathcal{D}$ è distributivo (cioè, un dominio dI) se e solo se è algebrico primo.* □

Dato un cpo $\mathcal{D}$, un *atomo* è un qualsiasi elemento $d \in D$ tale che $\perp \prec d$. L'insieme degli atomi viene indicato con $D^\diamond$ e, per ogni $x \in D$, si definisce $K^A(x) = \downarrow x \cap D^\diamond$. Un dominio di Scott $\mathcal{D}$ sarà detto *atomico* se e solo se $\sqcup K^A(x) = x$ per ogni $x \in D$. Presentiamo in primo luogo una interessante proprietà degli atomi di un dominio di Scott:

Lemma 3.4.1 *Sia $\mathcal{D}$ un dominio di Scott.*

1. *Ogni atomo di $\mathcal{D}$ è compatto, cioè $D^\diamond \subseteq D^\circ$;*

2. *se $\mathcal{D}$ è un dominio dI atomico, allora per ogni insieme compatibile di atomi A vale che $K^A(\sqcup A) = A$.*

Dimostrazione: Per la prima parte, se $x \in D^\diamond$ non fosse compatto, essendo $x = \sqcup K(x)$, avremmo $K(x) = \{\perp\}$ e quindi $x = \perp$, il che è in contraddizione con il fatto che x sia un atomo.
Per la seconda parte, l'inclusione da destra a sinistra è ovvia, perciò rimane solo da dimostrare quanto segue: se a è un atomo e $a \sqsubseteq \sqcup A$ allora $a \in A$.

Dimostriamolo prima nel caso che A sia finito. Per assurdo, supponete che $a \notin A$: risulta $a \sqcap (\sqcup A) = a$ (essendo $a \sqsubseteq \sqcup A$) ma, per distributività (essendo A finito)

$$a \sqcap (\sqcup A) = \sqcup\{a \sqcap x, x \in A\} = \perp$$

poiché $a \sqcap b = \perp$ per ogni $a, b \in D^\diamond, a \neq b$. Dunque $a = \perp$, il che contraddice $a \in D^\diamond$.
Per il caso infinito, sia $S = \{\sqcup B : B \subseteq A \text{ finito}\}$; questo è ovviamente un insieme diretto, e $\sqcup S = \sqcup A$. Perciò $a \sqsubseteq \sqcup S$; ma a è un atomo, e quindi $a \sqsubseteq \sqcup B$ per qualche $B \subseteq A$ finito. Usando la dimostrazione per il caso finito, otteniamo quindi che $a \in B \subseteq A$. □

I domini dI atomici sono anche noti in letteratura come domini qualitativi, dal lavoro di Girard [Gir86] che fu il primo a dare una teoria di rappresentazione semplice ed elegante per questa classe di domini; riprenderemo in maggiore dettaglio questo tipo di rappresentazione nel Capitolo 4.

Un'importante proprietà che riguarda la relazione fra atomicità e le coppie immersione-proiezione stabili è la seguente:

Lemma 3.4.2 *Sia $\langle f, g\rangle : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_1$ una coppia immersione-proiezione stabile. Se x è un atomo di $\mathcal{D}_0$, allora $f(x)$ è un atomo di $\mathcal{D}_1$.*

Dimostrazione: Ricordiamo in primo luogo che f è iniettiva e stretta (per la Proprietà 3.3.1); quindi $f(x) \neq \bot_1$ (essendo x un atomo, e quindi un elemento diverso da $\bot_0$). Ora, si supponga che $\bot_1 \sqsubseteq y \sqsubseteq f(x)$; poiché g è monotona, risulta $g(\bot_1) = \bot_0 =\sqsubseteq g(y) \sqsubseteq g(f(x)) = x$. Ma allora, essendo x un atomo, $\bot_0 = g(y)$ oppure $g(y) = x$. Poiché $y \sqsubseteq f(x)$, abbiamo $y = f(g(y))$ e quindi o $f(\bot_0) = \bot_1 = y$ oppure $y = f(x)$. □

Vale la pena di osservare che i domini dI atomici hanno la speciale proprietà di essere localmente isomorfi ad un'algebra di Boole completa, come indicato nella seguente

Proprietà 3.4.2 *Sia $\mathcal{D}$ un dominio dI atomico. Per ogni $x \in D$, l'insieme $\downarrow x$ (con l'ordine indotto) è un'algebra di Boole completa.*

Dimostrazione: Il fatto che $\mathcal{D}$ sia consistentemente completo garantisce che $\downarrow x$ sia un reticolo completo, utilizzando l'osservazione che $\downarrow x$ ha x come maggiorante. Inoltre, la distributività segue dalla distributività di $\mathcal{D}$. Per i complementi, sia $y \in \downarrow x$ e si definiscano $A = K^A(y)$ e $B = K^A(x) \setminus K^A(x)$. Si noti che $\sqcup A = y$ e si ponga $y' = \sqcup B$. Otteniamo:

- $y \sqcup y' = (\sqcup K^A(y)) \sqcup (\sqcup(K^A(x) \setminus K^A(y))) = \sqcup K^A(x) = x$;
- $y \sqcap y' = (\sqcup K^A(y)) \sqcap (\sqcup(K^A(x) \setminus K^A(y)))$ che, per distributività, è uguale a $y \sqcap y' = \sqcup\{a \sqcap b : a \in K^A(y), b \in K^A(x) \setminus K^A(y)\}$. Ma l'estremo inferiore di due atomi distinti è sempre il bottom, quindi $y \sqcap y' = \bot$.

Perciò y' è il complemento di y. □

Capitolo 4

Alcune costruzioni universali

4.1 Introduzione

In questo capitolo studiamo la struttura degli spazi di tolleranza con gli strumenti dell'algebra universale: a questo scopo, considereremo la categoria degli spazi di tolleranza (numerabili) con le immersioni come morfismi. È ben noto, dai risultati di Rado [Rad67], che questa categoria (che è equivalente alla categoria dei grafi non orientati con immersioni rigide) contiene un oggetto universale omogeneo. Dimostreremo che questa categoria è equivalente a quella dei domini dI atomici coerenti (con coppie immersione-proiezione stabili come frecce; si veda anche Berry [Ber79]), e otterremo come conseguenza un'oggetto universale omogeneo anche per quest'ultima categoria.

La costruzione molto diretta ed esplicita di Rado si può generalizzare al fine di ottenere oggetti universali omogenei anche per altre categorie di rappresentazioni. Se si considerano ad esempio i domini qualitativi di Girard [Gir86], che sono generalizzazioni abbastanza naturali degli spazi di tolleranza, è facile costruire un oggetto universale omogeneo, che è ottenuto in modo del tutto analogo al grafo di Rado. Dimostreremo che questa categoria è equivalente a quella dei domini dI atomici, e otterremo così una costruzione molto diretta di un dominio universale omogeneo per questa categoria.

È immediato osservare che queste costruzioni possono essere ulteriormente generalizzate considerando strutture con una nozione di causalità (abilitazione), come le strutture di eventi [Win80, NPW81]: naturalmente, gli spazi di tolleranza (domini qualitativi) sono casi molto particolari di strutture di eventi prime (strutture di eventi generali, rispettivamente), dove la relazione di abilitazione sia banale. Generalizzeremo ulteriormente le nostre costruzioni, e otterremo una definizione molto diretta di struttura di eventi stabile universale omogenea. Sfortunatamente, in questo caso non abbiamo un'equivalenza categoriale con la corrispondente categoria di domini (i domini dI). Quindi ci dobbiamo limitare in effetti ad ottenere un dominio universale, senza che l'omogeneità sia garantita.

Forniremo anche una costruzione alternativa per un dominio dI universale, presentata in [BCS93], e basata sulla nozione di traccia di Mazurkiewicz, che usa ancora una volta il grafo di Rado come punto di partenza.

Il lavoro contenuto in questo capitolo si può interpretare in due modi: da un lato, dimostra come gli spazi di tolleranza siano un caso speciale di rappresentazioni ben note; d'altro canto, prova che la loro struttura universale ha delle proprietà di regolarità particolari.

4.2 Un'introduzione all'universalità

Nella teoria della semantica denotazionale dei linguaggi di programmazione e della concorrenza, molti autori hanno stabilito l'esistenza (o provato l'inesistenza) di particolari tipi di domini universali. Il lavoro pionieristico di Scott [Sco76], che provò l'esistenza di un reticolo ω-algebrico universale, è stato seguito da maggiori ricerche nella stessa direzione, specialmente da parte di Plotkin [Plo78] e Gunter [Gun87]. Droste ha sottolineato l'importanza di disporre di oggetti universali omogenei per varie categorie di domini, e ha ottenuto molti risultati in questo senso, usando teoremi classici di teoria dei modelli [DG93]; lo stesso Droste ha anche lavorato molto nel tentativo di mettere in relazione domini universali con le loro rappresentazioni universali, principalmente mediante le strutture di eventi [Dro91] e le strutture di dati concrete di Kahn e Plotkin (si veda anche [KP78]).

Diamo in primo luogo un'introduzione generale categoriale all'universalità, ed enunciamo alcuni risultati che useremo nel seguito. Sia $\mathcal{C}$ una categoria dove tutte le frecce siano moniche, e $\mathcal{C}^*$ sia una sottocategoria piena di $\mathcal{C}$. Un oggetto $U \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ è

- $\mathcal{C}^*$*-universale* se e solo se per ogni oggetto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^*)$ esiste una freccia $f : A \to U$; per esempio, nel caso che $\mathcal{C}$ rappresenti un insieme preordinato, un oggetto $\mathcal{C}^*$-universale rappresenta un maggiorante di $\mathcal{C}^*$;

- $\mathcal{C}^*$*-omogeneo* se e solo se per ogni $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^*)$ e per ogni coppia di frecce $f, g : A \to U$ esiste un automorfismo h di U (cioè, una freccia $h : U \to U$ che sia un isomorfismo di $\mathcal{C}$) tale che $h \circ g = f$; in altre parole, ogni volta che un oggetto di $\mathcal{C}^*$ si può "mappare" in U usando due frecce, queste frecce differiscono fra loro solo per la composizione con un automorfismo di U;

- $\mathcal{C}^*$*-saturato* se e solo se per ogni $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^*)$ e per ogni coppia di frecce $f : A \to U$ e $g : A \to B$ esiste una freccia $h : B \to U$ tale che $h \circ g = f$; questo si può interpretare come segue: se un oggetto A di $\mathcal{C}^*$ si può mappare in U attraverso f, e se si può anche mappare in qualche altro oggetto B, allora f si può estendere in modo naturale ad una mappa da B ad U.

A noi interessa in particolare il caso in cui $\mathcal{C}$ sia una categoria algebroidale (poiché tutte le categorie di rappresentazioni sono di questo tipo) e $\mathcal{C}^*$ sia la sottocategoria di tutti gli oggetti finiti. Per comodità, richiamiamo al lettore le definizioni fondamentali; una categoria è *semi-algebroidale* se ogni ω-catena di oggetti finiti ha un colimite, ed inoltre ogni oggetto è il colimite di una ω-catena di oggetti finiti. È *algebroidale* se è semi-algebroidale, la sottocategoria degli oggetti finiti ha scheletro al più numerabile, e per ogni due oggetti A, B l'insieme $\mathrm{Hom}(A, B)$ è al più numerabile.

Abbiamo il seguente importante risultato, dimostrato in [DG93]:

Teorema 4.2.1 (Droste e Göbel [DG93]) *Sia $\mathcal{C}$ una categoria algebroidale, U un oggetto di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_f$ la sottocategoria piena degli oggetti finiti; allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *U è un oggetto $\mathcal{C}$-universale $\mathcal{C}_f$-omogeneo;*

2. *U è un oggetto $\mathcal{C}_f$-saturato.*

Inoltre, se questo vale, allora U è unico a meno di isomorfismi. □

Questo ci dà un modo per dimostrare che un certo oggetto U è universale ed omogeneo; dobbiamo solo mostrare che, ogni volta che esiste un'immersione $f : A \to U$ di un oggetto finito A in U, e ogni volta che A è immergibile in B, esiste un'immersione di B in U che estende semplicemente f attraverso l'immersione data. Quindi, si deve semplicemente dimostrare che è possibile mappare ogni oggetto finito nell'oggetto (candidato) universale omogeneo "passo dopo passo", ed ogni volta l'immersione è semplicemente ottenuta estendendo quella precedente.

Ciò che si vuole di solito, al fine di semplificare le dimostrazioni, è la possibilità di provare la proprietà di saturazione per il caso speciale in cui B sia ottenuto da A aggiungendo semplicemente un elemento. Al fine di esprimere questa proprietà in termini categoriali, definiamo il concetto di categoria incrementale. Una freccia $f : A \to B$ in una categoria algebroidale $\mathcal{C}$ è un *incremento* se e solo se $f = g \circ h$ implica che g oppure h sia un isomorfismo. Diremo che $\mathcal{C}$ è incrementale se e solo se contiene un oggetto debolmente iniziale e per ogni morfismo $f : A \to B$ fra due oggetti finiti $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_f)$ esiste una catena finita $(A_i, f_i)_{i=0,\dots,n-1}$ tale che $A = A_0$, $B = B_n$, $f = f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0$ ed ogni $f_i : A_i \to A_{i+1}$ è un incremento.

Usando la stessa notazione di prima, diremo che un oggetto U di $\mathcal{C}$ è *$\mathcal{C}^*$-incrementalmente-saturato* se e solo se per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^*)$ e ogni due frecce $f : A \to U$ e $g : A \to B$ tali che g sia un incremento, esiste una freccia $h : B \to U$ con $h \circ g = f$. Dimostriamo quanto segue:

Teorema 4.2.2 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria algebroidale incrementale e U un oggetto di $\mathcal{C}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *U è un oggetto $\mathcal{C}$-universale $\mathcal{C}_f$-omogeneo;*

2. *U è un oggetto $\mathcal{C}_f$-saturato;*

3. *U è un oggetto $\mathcal{C}_f$-incrementalmente-saturato.*

Dimostrazione: Dobbiamo solo dimostrare la seconda equivalenza, poiché la prima è semplicemente l'enunciato del Teorema 4.2.1. È evidente che ogni oggetto saturato è anche incrementalmente saturato (in ogni categoria), quindi dimostriamo l'inverso (che vale solo in una categoria incrementale). Si supponga che $f : A \to U$ sia una freccia da un oggetto finito, e $g : A \to B$ sia una qualsiasi freccia fra due oggetti finiti. Poiché la categoria è incrementale, esiste una catena finita $(A =)A_0 \overset{g_0}{\to} A_1 \overset{g_1}{\to} \cdots A_{n-1} \overset{g_{n-1}}{\to} A_n(= B)$ dove $g = g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1 \circ g_0$ e ongi g_i è un incremento. Sia ora $f_0 = f$; per definizione di saturazione incrementale, otteniamo una funzione $f_1 : A_1 \to U$ tale che $f_1 \circ g_0 = f_0$, come nel seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A = A_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "f=f_0"'] & A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dl, "f_1"] & A_2 & \cdots & A_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & A_n = B \\
U
\end{tikzcd}$$

Procedendo in questo modo si ottiene infine una freccia $f_n : B \to U$ tale che $f_n \circ g_{n-1} \circ \cdots g_1 \circ g_0 = f$. Ponendo $h = f_n$ si ha $h \circ g = f$, come richiesto. $\square$

4.3 Costruzioni universali deterministiche

4.3.1 La categoria degli spazi di tolleranza con immersioni

In questa sezione considereremo principalmente la categoria degli spazi di tolleranza e le sue relazioni con la categoria dei domini dI atomici coerenti. Gli spazi di tolleranza sono anche noti come spazi di coerenza (o spazi coerenti), nella terminologia introdotta da Girard [Gir87]. Uno *spazio di tolleranza* (il termine fu introdotto da Zeeman [Zee62], e fu successivamente studiato in varie forme, per esempio in [KKM90, Shr71]) $\mathcal{T} = (X, \mathrm{co})$ è un insieme X dotato di una relazione binaria riflessiva e simmetrica co, spesso chiamata la relazione di "consistenza" o di "indistinguibilità"; gli elementi di X sono talvolta chiamati "nodi". D'ora in avanti, X e co (eventualmente con opportuni indici) denoteranno l'insieme soggiacente e la relazione di consistenza associati allo spazio di tolleranza $\mathcal{T}$.

Una *funzione continua (rispetto alla tolleranza)* $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ è una funzione fra gli insiemi soggiacenti $f : X \to X'$ tale che

$$\forall x, y \in X.\, x \,\mathrm{co}\, y \implies f(x) \,\mathrm{co}'\, f(y)$$

cioè è un omomorfismo di spazi di tolleranza (un morfismo di grafi, se pensiamo ad uno spazio di tolleranza come ad un grafo riflessivo non orientato). Un'*immersione*[1] è un omomorfismo $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ di spazi di tolleranza che sia iniettivo e tale che

$$\forall x, y \in X.\, x \,\mathrm{co}\, y \iff f(x) \,\mathrm{co}'\, f(y).$$

Naturalmente, uno spazio di tolleranza può essere immerso in un altro se e solo se il primo è un sottografo (indotto) del secondo. Se $\mathcal{T}$ è uno spazio di tolleranza, e $Y \subseteq X$, poniamo $\mathcal{T}^Y = (Y, \mathrm{co} \cap Y^2)$ (cioè il sottografo indotto da Y). Ovviamente la mappa di inclusione $i : \mathcal{T}^Y \to \mathcal{T}$ (dove $i(y) = y$ per ogni $y \in Y$) è un'immersione.
Indicheremo con **TolSp** la categoria degli spazi di tolleranza al più numerabili con immersioni come morfismi; le proprietà principali di questa categoria sono indicate nella seguente

Proprietà 4.3.1 *Nella categoria* **TolSp** *ogni freccia è monica, e un oggetto è finito se e solo se ha un insieme soggiacente finito. Inoltre,* **TolSp** *è una categoria algebroidale incrementale.*

Dimostrazione: Il fatto che ogni freccia sia monica segue perché **TolSp** è una sottocategoria di **Set** che contiene solo mappe iniettive, e le mappe iniettive di **Set** sono naturalmente moniche.
Oggetti finiti. Si osservi che, per ogni spazio di tolleranza al più numerabile $\mathcal{T}$, si può costruire una ω-catena di spazi di tolleranza finiti $(\mathcal{T}_i, f_i)$ con limite $\mathcal{T}$ (si prenda una sequenza di insiemi finiti $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots$ con unione X e tali che $|X_i| \leq i$ per ogni

[1] Questi morfismi sono chiamati "rigid embeddings" in [BCS93].

$i \in \omega$, e si definisca $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}^{X_i}$, con f_i definito prendendo la mappa di inclusione). Poiché la presenza di un'immersione da $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}'$ implica ovviamente che $|X| \leq |X'|$, si ha subito che ogni oggetto finito deve avere supporto finito. Per il viceversa, si supponga che $\mathcal{T}$ sia finito ma abbia un supporto infinito. Allora, si prenda la suddetta ω-catena $(\mathcal{T}_i, f_i)$ avente limite $\mathcal{T}$; essendo $\mathcal{T}$ immergibile in se stesso usando l'identità, ci deve essere un'immersione di $\mathcal{T}$ in qualche insieme finito, contraddicendo l'ipotesi. Si noti che questo dimostra anche che ogni oggetto è il colimite di qualche ω-catena di oggetti finiti.
Limiti di ω-catene. Dobbiamo dimostrare che ogni ω-catena di spazi di tolleranza finiti ha un limite. Senza perdita di generalità, possiamo assumere di avere una ω-catena $(X_i, \mathrm{co}_i)_{i\in\omega}$ dove $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots$. Sia ora $X = \cup_{i\in\omega} X_i$ e $\mathrm{co} = \cup_{i\in\omega}\mathrm{co}_i$. Lo spazio di tolleranza $\mathcal{T} = (X, \mathrm{co})$ è ovviamente il colimite della suddetta catena.
Algebroidalità. A questo punto, ci rimane solo da dimostrare che c'è una quantità al più numerabile di spazi di tolleranza finiti non isomorfi (che è banalmente vero), e che c'è una quantità al più numberabile di immersioni fra due spazi di tolleranza finiti (in effetti, ne esiste solo un numero finito).
Incrementi. Notate che chiaramente lo spazio di tolleranza vuoto è un oggetto debolmente iniziale. È immediato osservare inoltre che un'immersione $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ fra spazi di tolleranza finiti è un incremento precisamente quando $|X'| = |X| + 1$. È quindi facile verificare che ogni immersione si può decomporre in incrementi, aggiungendo un nodo per volta. $\square$

Una proprietà molto importante connessa alla categoria degli spazi di tolleranza è stata studiata da Rado in [Rad67], dove si dimostra che esiste uno spazio di tolleranza (più precisamente: un grafo non orientato) universale omogeneo, e ne viene fornita una costruzione esplicita. Poiché nelle sezioni successive forniremo varie generalizzazioni di questa costruzione, la presentiamo ora in dettaglio, dando la definizione originale di [Rad67] (per maggiori informazioni sul grafo di Rado, si veda [Cam90]).

Teorema 4.3.1 (Rado [Rad67]) *Sia $\mathcal{T}_\mathrm{R}$ lo spazio di tolleranza avente ω come insieme soggiacente, e con relazione di compatibilità co_R definita come segue*

$$n \ \mathrm{co}_\mathrm{R}\ m \iff \text{il } \min(n,m)\text{-esimo bit nell'espansione binaria di } \max(n,m) \text{ è un “1”.}$$

$\mathcal{T}_\mathrm{R}$ è l'oggetto universale omogeneo nella categoria **TolSp**.

Dimostrazione: Per la Proprietà 4.3.1, usando il Teorema 4.2.2, dobbiamo solo dimostrare che $\mathcal{T}_\mathrm{R}$ è incrementalmente saturato. Possiamo limitarci, senza perdita di generalità, ai sottospazi finiti di $\mathcal{T}_\mathrm{R}$; quindi sia $Y \subseteq_\mathrm{fin} \omega$ e si supponga che $\mathcal{T} = (Y \cup \{*\}, \mathrm{co})$ sia tale che $\mathrm{co}^Y = \mathrm{co}_\mathrm{R}^Y$, dove $* \notin \omega$. Dobbiamo trovare un $x \in \omega \setminus Y$ tale che $\mathcal{T}$ sia isomorfo a $\mathcal{T}_\mathrm{R}^{Y\cup\{x\}}$. Sia $A = \{y \in Y : y \ \mathrm{co}\ *\}$, e si definisca x come segue

$$x = 2^{1+\max Y} + \sum_{k\in A} 2^k.$$

Dobbiamo ora dimostrare che, per ogni $y \in Y$, si ha $x \ \mathrm{co}_\mathrm{R}\ y$ se e solo se $* \ \mathrm{co}\ y$. Ora, si noti che $x \geq 2^{1+\max Y}$ e quindi x è maggiore di ogni elemento di Y. Perciò, per ogni $y \in Y$, $x \ \mathrm{co}_\mathrm{R}\ y$ se e solo se l'y-esimo bit nell'espansione binaria di x è 1, se e solo se $y \in A$, il che succede solo quando $* \ \mathrm{co}\ y$. $\square$

4.3.2 Un dominio dI coerente atomico universale omogeneo

Lo scopo di questa sezione è fornire una dimostrazione di equivalenza fra la categoria degli spazi di tolleranza con immersioni, e la categoria dei domini dI coerenti atomici con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi. Una conseguenza di questo risultato è che abbiamo una costruzione diretta esplicita del dominio dI coerente atomico (cioè, del dominio coerente qualitativo) universale omogeneo.

Sia **CAdIDom** la categoria dei domini dI coerenti atomici al più numerabili, con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi. Definiamo per prima cosa un funtore Clique dalla categoria **TolSp** a **CAdIDom** come segue:

- per ogni spazio di tolleranza $\mathcal{T}$, chiamiamo Clique($\mathcal{T}$) il poset i cui elementi sono le clique[2] di $\mathcal{T}$ (visto come grafo non orientato); l'ordinamento è dato dall'inclusione;
- se $f : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ è un'immersione di spazi di tolleranza, definiamo Clique(f) $= \langle f_e, f_p \rangle$ dove, per ogni due clique $\sigma_0 \subseteq X_0$ e $\sigma_1 \subseteq X_1$, si ponga $f_e(\sigma_0) = \{f(x), x \in \sigma_0\} = f(\sigma_0)$ e $f_p(\sigma_1) = \{x \in X_0 : f(x) \in \sigma_1\} = f^{-1}(\sigma_1)$.

Dimostreremo che Clique dà un'equivalenza di categorie, usando il Teorema A.1.1. Prima però dobbiamo mostrare che Clique è ben definito come funtore.

Lemma 4.3.1 *Clique è un funtore dalla categoria* **TolSp** *nella categoria* **CAdIDom***.*

Dimostrazione: In primo luogo, dimostriamo che, per ogni spazio di tolleranza $\mathcal{T}$, Clique($\mathcal{T}$) è effettivamente un dominio dI coerente atomico. Sia $\mathcal{D} =$ Clique($\mathcal{T}$) per un dato spazio di tolleranza $\mathcal{T}$. Si osservi che $\mathcal{D}$ è effettivamente un poset, e gli estremi superiori, quando esistono, sono semplicemente ottenuti come unioni insiemistiche.

(i) *Completezza.* Sia $S \subseteq D$ diretto, e $\sigma = \cup S$. Se $x, y \in \sigma$ allora $x \in \alpha$ e $y \in \beta$ per qualche $\alpha, \beta \in S$; quindi $\alpha \subseteq \gamma, \beta \subseteq \gamma$ per qualche $\gamma \in S$, e perciò $x, y \in \gamma$. Ma γ è una clique e quindi $x \operatorname{co} y$. Dunque σ è una clique e $\sigma = \cup S$.

(ii) *Elemento minimo.* L'elemento minimo è la clique vuota.

(iii) *Elementi compatti.* Proviamo che una clique è compatta se e solo se è finita. Se $\alpha = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è una clique finita e $\alpha \subseteq \cup S$ per qualche diretto $S \subseteq D$, allora $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ tali che $x_i \in \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ma, per direttezza, esiste un $\beta \in S$ tale che $\alpha_i \subseteq \beta$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, e quindi $\alpha \subseteq \beta \in S$. Viceversa, sia α isolato e infinito. Allora, possiamo trovare una sequenza infinita di insiemi finiti $\alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \ldots$ tale che $\cup_i \alpha_i = \alpha$. Ognuno di essi è una clique, e $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ è un insieme diretto con $\alpha = \cup S$, ma $\alpha \subseteq \alpha_i$ non si verifica per alcun i.

(iv) *Algebricità.* Sia $\alpha \in D$; l'insieme $K(\alpha)$ è l'insieme delle sottoclique finite di α. Questo dimostra anche che $\mathcal{D}$ è finitario (un insieme finito ha solo una quantità finita di sottoinsiemi).

(v) *Consistente completezza.* Immediata.

[2] Come al solito, una clique è semplicemente un insieme $\sigma \subseteq X$ tale che $x \operatorname{co} y$ per ogni $x, y \in \sigma$.

(vi) *Distributività.* Segue dalla distributività insiemistica, osservando semplicemente che $\sqcap A = \cap A$ per ogni insieme non vuoto A.

Fin qui, abbiamo dimostrato che Clique($\mathcal{T}$) è un dominio di Scott distributivo. Si noti che Clique($\mathcal{T}$) è anche coerente; un insieme compatibile a coppie di clique è anche compatibile, e quindi ha un estremo superiore. Per l'atomicità, chiaramente:

$$D^A = \{\{x\}, x \in X\}.$$

ed inoltre, per ogni clique α, si ha $K^A(\alpha) = \{\{x\}, x \in \alpha\}$ e perciò $\sqcup K^A(\alpha) = \cup_{x\in\alpha}\{x\} = \alpha$. Per la seconda parte, dobbiamo solo dimostrare che Clique(f) $= \langle f_e, f_p\rangle$ è una coppia immersione-proiezione stabile, ogni volta che $f : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ è un'immersione di spazi di tolleranza. Si osservi in primo luogo che, se σ_0, σ_1 sono clique di $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$, allora $f_e(\sigma_0), f_p(\sigma_1)$ sono clique, a causa della definizione di immersione. La monotonicità e la continuità seguono dal fatto che f_e e f_p sono semplicemente ottenuti come estensioni di f e f^{-1} a insiemi. Per la proprietà delle coppie immersione-proiezione stabili abbiamo quanto segue; sia σ_i una clique di $\mathcal{T}_i$ (per $i = 0, 1$):

- poiché f è iniettiva, si ha $f_p(f_e(\sigma_0)) = f^{-1}(f(\sigma_0)) = \sigma_0$, come richiesto;
- si supponga ora che $x \in f_e(f_p(\sigma_1))$; ciò significa che $x = f(y)$ per qualche $y \in f^{-1}(\sigma_1)$, cioè $x = f(y)$ e $f(y) \in \sigma_1$, che a sua volta implica $x \in \sigma_1$. Quindi, $f_e(f_p(\sigma_1)) \subseteq \sigma_1$;
- per stabilità, si supponga che $\sigma_1 \subseteq f_e(\sigma_0)$, cioè $\sigma_1 \subseteq f(\sigma_0)$. Allora

  $$f_e(f_p(\sigma_1)) = f(f^{-1}(\sigma_1)).$$

  Se $x \in \sigma_1$, allora $x \in f(\sigma_0)$, e quindi $x = f(y)$ per qualche y. Perciò $y \in f^{-1}(\sigma_1)$ e quindi $x = f(y) \in f(f^{-1}(\sigma_1))$, come richiesto.

Quindi, Clique(f) è una coppia immersione-proiezione stabile. □

Inoltre, ogni dominio dI coerente atomico è isomorfo al dominio di clique di qualche spazio di tolleranza:

Lemma 4.3.2 *Sia $\mathcal{D}$ un dominio dI atomico coerente. Esiste uno spazio di tolleranza $\mathcal{T}$ tale che Clique($\mathcal{T}$) $\cong \mathcal{D}$.*

Dimostrazione: Sia $X = D^\diamond$ e si definisca x co y se e solo se $x \uparrow y$. Ora, si consideri questo spazio di tolleranza, e si definisca:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \text{Clique}(X) & \to & D \\ & \alpha & \mapsto & \sqcup\alpha. \end{array}$$

Si osservi che, se α è una clique di X, allora è un sottoinsieme compatibile a coppie di D, e quindi $\sqcup\alpha$ esiste. Dobbiamo dimostrare che φ è un isomorfismo d'ordine.

(i) *Iniettività.* Si supponga che $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, cioè $\sqcup\alpha = \sqcup\beta$. Ora $K^A(\sqcup\alpha) = K^A(\sqcup\beta)$ e quindi, usando il Lemma 3.4.1, $\alpha = \beta$.

(ii) *Suriettività.* Immediata conseguenza dell'atomicità.

(iii) *Monotonicità.* Chiaramente, se $\alpha \subseteq \beta$ allora $\sqcup\alpha \sqsubseteq \sqcup\beta$.

(iv) *Preservazione dell'ordine.* Si supponga che $\sqcup\alpha \sqsubseteq \sqcup\beta$; allora $K^A(\sqcup\alpha) = K^A(\sqcup\beta)$ e quindi (usando il Lemma 3.4.1) $\alpha \subseteq \beta$. □

In effetti, Clique dà un'equivalenza categoriale, come spiegato nel seguente:

Teorema 4.3.2 *Il funtore Clique è un'equivalenza categoriale fra le categorie* **TolSp** *e* **CAdIDom**.

Dimostrazione: Usando il Teorema A.1.1, per i Lemmi 4.3.1 e 4.3.2, dobbiamo solo dimostrare che Clique è pieno e fedele. Per la fedeltà, siano $f, g : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ due immersioni tali che $\mathrm{Clique}(f) = \mathrm{Clique}(g)$. Si noti che, per tutti gli $x \in X_0$, $f(x)$ è il solo elemento di $f(\{x\}) = f_e(\{x\})$. Poiché $f_e = g_e$, abbiamo $f = g$ come richiesto.
La dimostrazione che Clique è pieno richiede una tecnica più sofisticata. Si supponga che $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ siano due spazi di tolleranza e $\langle f, g\rangle : \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_0) \to \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_1)$ sia una coppia immersione-proiezione stabile. Per il Lemma 3.4.2, l'immagine di ogni atomo di $\mathrm{Clique}(\mathcal{T}_0)$ (cioè di ogni clique singoletto) è un atomo di $\mathcal{T}_1$. Ciò significa che, per tutti gli $x \in X_0$, $f(\{x\})$ contiene solo un elemento di X_1. Si definisca $h : X_0 \to X_1$ ponendo $f(\{x\}) = \{h(x)\}$ (cioè $h(x)$ è il solo elemento dell'insieme $f(\{x\})$). Dimostreremo prima che h è un'immersione di spazi di tolleranza. L'iniettività segue dall'iniettività di f.
Si supponga ora che $x \,\mathrm{co}\, y$ in $\mathcal{T}_0$. Allora $\{x\}$ e $\{y\}$ sono compatibili in $\mathrm{Clique}(\mathcal{T}_0)$, e quindi (usando la Proposizione 3.3.1) $f(\{x, y\}) = f(\{x\}) \cup f(\{y\}) = \{h(x)\} \cup \{h(y)\}$ che è una clique di $\mathcal{T}_1$, il che significa $h(x) \,\mathrm{co}\, h(y)$. Viceversa, si supponga che $h(x) \,\mathrm{co}\, h(y)$, ovvero $\{h(x), h(y)\} \in \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_1)$. Per atomicità, $\{h(x)\} \cup \{h(y)\} \in \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_1)$, cioè $f(\{x\}) \,\mathrm{co}\, f(\{y\})$, che implica $x \,\mathrm{co}\, y$.
Infine, è immediato dimostrare che $\langle f, g\rangle = \mathrm{Clique}(h)$. Quindi Clique è pieno. □

Come corollario, otteniamo infine che

Corollario 4.3.1 *Clique*$(\mathcal{T}_\mathrm{R})$ *è il dominio coerente atomico universale omogeneo.*

Dimostrazione: Segue dal Teorema 4.3.1, usando il Teorema 4.3.2 e considerando l'Osservazione A.1.1. □

Questo fornisce una costruzione diretta del dominio dI coerente atomico omogeneo universale, che può semplicemente essere ottenuto come il dominio di clique del grafo universale omogeneo di Rado.

4.3.3 La categoria degli spazi di tolleranza generalizzati

In questa sezione intendiamo generalizzare la nozione di spazio di tolleranza sostituendo la relazione di tolleranza (che è binaria) con un tipo più generale di predicato finitario, seguendo l'approccio di [Gir87]. Come risultato, otterremo la categoria di quelli che chiamiamo *spazi di tolleranza generalizzati*, per cui proveremo una generalizzazione del teorema di Rado, usando analoghe costruzioni numeriche.

Uno *spazio di tolleranza generalizzato* (abbreviato come gts) $\mathcal{T} = (X, \mathrm{Con})$ è un insieme X dotato di un predicato $\mathrm{Con} \subseteq \wp_{\mathrm{fin}}(X)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. per ogni $x \in X$ si ha $\{x\} \in \mathrm{Con}$;
2. Con è chiuso verso il basso, cioè se $A \in \mathrm{Con}$ e $B \subseteq A$ allora anche $B \in \mathrm{Con}$.

Il predicato Con si può interpretare come un predicato di consistenza, e si può pensare ad uno spazio di tolleranza ordinario come a un particolare tipo di spazio di tolleranza generalizzato dove un insieme finito è consistente se e solo se ogni coppia di elementi che contiene è nella relazione di indistinguibilità.

Una funzione *(gts)-continua* $f : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ è una funzione $f : X_0 \to X_1$ tale che, per ogni $A \in \mathrm{Con}_0$, si abbia $f(A) \in \mathrm{Con}_1$. In particolare, un'*immersione* (di spazi di tolleranza generalizzati) è una funzione iniettiva $f : X_0 \to X_1$ tale che, per ogni $A \in \wp_{\mathrm{fin}}(X_0)$, vale che $A \in \mathrm{Con}_0$ se e solo se $f(A) \in \mathrm{Con}_1$.

Se $Y \subseteq X$, denotiamo con $\mathcal{T}^Y$ la struttura (Y, Con^Y), dove $\mathrm{Con}^Y = \mathrm{Con} \cap \wp_{\mathrm{fin}}(Y)$ (la dimostrazione che questo è in effetti un gts è facile, e viene omessa). Anche in questo caso, la mappa di inclusione $i : \mathcal{T}^Y \to \mathcal{T}$ è un'immersione di spazi di tolleranza generalizzati. Indicheremo con **GTolSp** la categoria degli spazi di tolleranza generalizzati al più numerabili, con immersioni come frecce. Anche in questo caso, abbiamo che:

Proprietà 4.3.2 *Nella categoria* **GTolSp** *ogni freccia è monica, ed un oggetto è finito se e solo se ha un insieme soggiacente finito. Inoltre,* **GTolSp** *è una categoria algebroidale incrementale.*

Dimostrazione: Il fatto che ogni freccia sia monica segue dall'osservazione che **GTolSp** è una sottocategoria di **Set** che contiene solo mappe iniettive.
Oggetti finiti. Si osservi in primo luogo che, per ogni gts al più numerabile $\mathcal{T}$, è possibile costruire una ω-catena $(\mathcal{T}_i, f_i)$ con limite $\mathcal{T}$ (si prenda qualsiasi sequenza di insiemi $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots$ con unione X e tali che $|X_i| \leq i$ per ogni $i \in \omega$, e sia $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}^{X_i}$, con f_i definite prendendo la mappa d'inclusione). Poiché la presenza di un'immersione di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ implica naturalmente che $|X| \leq |X'|$, si ha immediatamente che ogni oggetto finito deve avere supporto finito. Per il viceversa, si supponga che $\mathcal{T}$ sia finito ma abbia supporto infinito. Allora, si prenda la suddetta ω-catena $(\mathcal{T}_i, f_i)$ il cui limite è $\mathcal{T}$; poiché $\mathcal{T}$ si può immergere in se stesso usando l'identità, ci deve essere un'immersione di $\mathcal{T}$ in qualche insieme finito, contraddicendo l'ipotesi. Si noti che questo dimostra anche che ogni oggetto è il colimite di qualche ω-catena di oggetti finiti.
Limiti di ω-catene. Dobbiamo dimostrare che ogni ω-catena di spazi di tolleranza generalizzati finiti ha un limite. Senza perdita di generalità, prendiamo una ω-catena $(X_i, \mathrm{Con}_i)_{i\in\omega}$ dove $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots$. Ora sia $X = \cup_{i\in\omega} X_i$ e $\mathrm{Con} = \cup_{i\in\omega} \mathrm{Con}_i$. Lo spazio di tolleranza generalizzato $\mathcal{T} = (X, \mathrm{Con})$ è ovviamente il colimite della suddetta catena.
Algebroidalità. Ci rimane solo da mostrare che i gts finiti non isomorfi sono al più numerabili (il che è banalmente vero), e che le immersioni fra due spazi di tolleranza generalizzati finiti sono al più numerabili (in effetti, finite).
Incrementi. Si noti che chiaramente lo spazio di tolleranza generalizzato vuoto è un oggetto debolmente iniziale. È immediato notare anche che un'immersione $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ fra gts finiti è un incremento precisamente quando $|X'| = |X| + 1$. È quindi banale che ogni immersione si possa scomporre in incrementi, aggiungendo un elemento per volta. □

Siamo ora pronti per dimostrare un'estensione del risultato di Rado che vale per spazi di tolleranza generalizzati. Ci serve prima un modo di codificare insiemi finiti di numeri naturali, codifica che useremo nella nostra costruzione:

Lemma 4.3.3 *Esiste un'iniezione (ricorsiva) $\Psi : \wp_{\mathrm{fin}}(\omega) \to \omega$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *Ψ non è suriettiva;*
- *per ogni insieme finito A di numeri naturali, $\Psi(A)$ è un maggiorante per A (nell'ordinamento naturale);*
- *se $A \subseteq B$ (dove entrambi gli insiemi siano sottoinsiemi finiti di ω) allora $\Psi(A) \leq \Psi(B)$.*

Dimostrazione: Sia $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ la successione dei numeri primi (cioè $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 3$ etc.). Si definisca Ψ come segue:

$$\Psi(\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}) = \prod_{i=1}^{k} \pi_i^{n_i}.$$

La funzione è iniettiva, per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, e ovviamente non è suriettiva. Chiaramente, per ogni i, $n_i \leq \pi_i^{n_i} \leq \Psi(\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\})$, e quindi la prima proprietà è verificata. La seconda proprietà è banale. $\square$

Ora, definiamo il gts universale omogeneo (candidato). Sia $X_U = \omega$, e, per ogni $A \in \wp_{\mathrm{fin}}(X_U)$, sia $A \in \mathrm{Con}_U$ se e solo se i seguenti vincoli sono soddisfatti:

1. $|A| \leq 1$ oppure
2. $|A| > 1$ e
   (a) per ogni $B \subset A$, $B \in \mathrm{Con}_U$;
   (b) il $\Psi(A \setminus \{\max A\})$-esimo bit nell'espansione binaria di $\max A$ è "1".

Questo è naturalmente un gts, che denoteremo con $\mathcal{T}_U$; ora, usando la tecnica della saturazione, dimostreremo che $\mathcal{T}_U$ è in effetti il gts universale omogeneo.

Teorema 4.3.3 *$\mathcal{T}_U$ è l'oggetto universale omogeneo della categoria* **GTolSp**.

Dimostrazione: Per la Proprietà 4.3.2, usando il Teorema 4.2.2, dobbiamo solo provare che $\mathcal{T}_U$ è incrementalmente saturato. Supponiamo che $Y \subseteq_{\mathrm{fin}} \omega$ e che $\mathcal{T} = (Y \cup \{*\}, \mathrm{Con})$ sia un gts con $\mathrm{Con}^Y = \mathrm{Con}_U^Y$. Vogliamo trovare un $x \in \omega \setminus Y$ tale che $\mathcal{T}$ sia isomorfo a $\mathcal{T}_U^{Y \cup \{x\}}$. Ora, sia $\mathcal{C}$ l'insieme degli elementi A di Con^Y tali che $A \cup \{*\} \in \mathrm{Con}$; chiaramente $\mathcal{C}$ non è vuoto (contiene l'insieme vuoto) ed è chiuso verso il basso. Si definisca:

$$x = 2^{1+\Psi(Y)} + \sum_{A \in \mathcal{C}} 2^{\Psi(A)}.$$

Dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Con}_U^{Y \cup \{x\}} = \mathrm{Con}_U^Y \cup \{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{C}\}$.

Per l'inclusione da sinistra a destra, si supponga che $A \in \mathrm{Con}_U$, e si consideri $A \cap (Y \cup \{x\})$ che è uguale a $A \cap Y$ se $x \notin A$, e a $(A \cap Y) \cup \{x\}$ altrimenti. Ci sono due casi. Se $x \notin A$, allora $A \cap (Y \cup \{x\}) = A \cap Y \in \mathrm{Con}_U^Y$. Si supponga, viceversa, che $x \in A$: dimostreremo che $A \cap Y \in \mathcal{C}$. Essendo A consistente, ogni suo sottoinsieme lo è. Quindi, in particolare,

$(A \cap Y) \cup \{x\}$ è consistente. Osservando che $x \geq 2^{1+\Psi(Y)} > \Psi(Y)$, in virtù del Lemma 4.3.3 si ottiene che x è un maggiorante di Y. Quindi x è il massimo di $(A \cap Y) \cup \{x\}$. Per consistenza, risulta che o $A \cap Y = \emptyset$ (che implica $A \cap Y \in \mathcal{C}$, perché $\mathcal{C}$ non è vuoto ed è chiuso verso il basso) oppure che il $\Psi(A \cap Y)$-esimo bit nell'espansione binaria di x è un "1". Ma questo significherebbe che o $\Psi(A \cap Y) = \Psi(Y) + 1$ (il che è impossibile, per l'ultima proposizione del Lemma 4.3.3), oppure $\Psi(A \cap Y) = \Psi(C)$ per qualche $C \in \mathcal{C}$, che a sua volta implica $A \cap Y \in \mathcal{C}$, per iniettività di Ψ.

Se $A \in \mathrm{Con}_U^Y$ allora $A = C \cap Y$ per qualche $C \in \mathrm{Con}_U$. Si noti che $x \geq 2^{1+\Psi(Y)} > \Psi(Y)$, quindi $x \notin Y$ e perciò $x \notin A$. Si prenda $D = C \setminus \{x\}$ (che è consistente, poiché C lo è). Allora $D \cap (Y \cup \{x\}) = (D \cap Y) \cup (D \cap \{x\}) = D \cap Y$ che è a sua volta uguale a $(C \cap \{x\}^C) \cap Y = (C \cap Y) \cap \{x\}^C = A \cap \{x\}^C = A$, cosicché $A \in \mathrm{Con}_U^{Y \cup \{x\}}$.

Si supponga ora che $A \in \mathcal{C}$; dimostreremo che $A \cup \{x\} \in \mathrm{Con}_U^{Y \cup \{x\}}$. Il fatto che $A \in \mathcal{C}$ implica che $A = C \cap Y$ per qualche $C \in \mathrm{Con}_U$, e quindi anche $A \in \mathrm{Con}_U$. Dimostreremo che $A \cup \{x\} \in \mathrm{Con}_U$ (e perciò $(A \cup \{x\}) \cap (Y \cup \{x\}) = (A \cap Y) \cup (A \cap \{x\}) \cup (Y \cap \{x\}) \cup \{x\}$, che è $A \cup \{x\}$, è un elemento di $\mathrm{Con}_U^{Y \cup \{x\}}$). Per dimostrare questo, si consideri il caso $A \neq \emptyset$ (l'altro caso è ovvio).

- Se $B \subset A \cup \{x\}$, allora o $x \notin B$ e quindi $B \in \mathrm{Con}_U$ (poiché $B \subseteq A$), oppure $B = D \cup \{x\}$ per qualche $D \subset A$. Ma allora $x \geq 2^{\Psi(A)} > \Psi(A) > \Psi(D)$ e quindi $x = \max B$. Ora, $D \in \mathcal{C}$ (poiché $D \subseteq A$) e quindi il $\Psi(D)$-esimo bit di x è un "1". Quindi $B \in \mathrm{Con}_U$.

- Poiché $x = \max(A \cup \{x\})$, dovremmo dimostrare che il $\Psi(A)$-esimo bit di x è un "1", che è vero essendo $A \in \mathcal{C}$. □

4.3.4 Un dominio dI atomico universale omogeneo

Lo scopo di questa sezione è di fornire una dimostrazione di equivalenza fra la categoria dei gts con immersioni, e la categoria dei domini dI atomici con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi. Una conseguenza di questo risultato è che avremo una costruzione diretta ed esplicita del dominio dI atomico universale omogeneo (dominio qualitativo), mimando esattamente quanto abbiamo fatto nel caso coerente.

Sia **AdIDom** la categoria dei domini dI atomici al più numerabili, con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi. Definiamo per prima cosa un funtore Dom : **GTolSp** $\to$ **AdIDom** come segue:

- per ogni gts $\mathcal{T}$, definiamo $\mathrm{Dom}(\mathcal{T})$ come il poset i cui elementi siano i sottoinsiemi consistenti di X, cioè quegli insiemi $Y \subseteq X$ tali che $\wp_{\mathrm{fin}}(Y) \subseteq \mathrm{Con}$; l'ordinamento è dato dall'inclusione;

- se $f : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ è un'immersione di gts, definiamo $\mathrm{Dom}(f) = \langle f_e, f_p \rangle$ dove, per ogni due insiemi consistenti $Y_0 \subseteq X_0$ e $Y_1 \subseteq X_1$, sia $f_e(Y_0) = \{f(x), x \in Y_0\} = f(Y_0)$ e $f_p(Y_1) = \{x \in X_0 : f(x) \in Y_1\} = f^{-1}(Y_1)$.

Dimostreremo che Dom dà un'equivalenza di categorie, usando il Teorema A.1.1. Prima, dobbiamo mostrare che Dom è ben definito come funtore.

Lemma 4.3.4 *Dom è un funtore dalla categoria* **GTolSp** *nella categoria* **AdIDom**.

Dimostrazione: Dimostriamo per prima cosa che, per ogni gts $\mathcal{T}$, Dom($\mathcal{T}$) è in effetti un dominio dI atomico. Sia $\mathcal{D} = \mathrm{Dom}(\mathcal{T})$ per un dato gts $\mathcal{T}$. Si noti che $\mathcal{D}$ è effettivamente un poset, e gli estremi superiori, quando esistono, sono semplicemente ottenuti come unioni insiemistiche.

(i) *Completezza.* Sia $S \subseteq D$ diretto, e $Y = \cup S$. Se $A \subseteq_{\mathrm{fin}} Y$ allora, per ogni $x \in A$, ci sarà qualche $Y_x \in S$ tale che $x \in Y_x$; quindi, essendo S diretto, ci sarà qualche $Y_A \in S$ tale che $Y_x \subseteq Y_A$ per ogni $x \in A$. Ma Y_A è un insieme consistente, e quindi $A \subseteq \cup_{x \in A} Y_x \subseteq Y$ appartiene a Con.

(ii) *Elemento minimo.* Il minimo elemento è l'insieme vuoto, che è consistente.

(iii) *Elementi compatti.* Dimostriamo che un insieme consistente è compatto se e solo se è finito. Se $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è un insieme consistente finito e $A \subseteq \cup S$ per qualche diretto $S \subseteq D$, allora $\exists Y_1, \ldots, Y_n \in S$ tale che $x_i \in Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ma, per direttezza, esiste un $Y \in S$ tale che $Y_i \subseteq Y$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, e quindi $A \subseteq Y \in S$. Viceversa, sia Y isolato e infinito. Allora si può trovare una sequenza infinita di insiemi finiti $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots$ tale che $\cup_i Y_i = Y$. Ognuno di essi è consistente, e $S = \{Y_0, Y_1, \ldots\}$ è un insieme diretto con $Y = \cup S$, ma $Y \subseteq Y_i$ non accade per alcun i.

(iv) *Algebricità.* Sia $Y \in D$; l'insieme $K(Y)$ è l'insieme dei sottoinsiemi finiti consistenti di Y. Chiaramente $K(Y)$ è diretto e il suo estremo superiore è Y. Questo dimostra anche che $\mathcal{D}$ è finitario (un insieme finito ha un numero finito di sottoinsiemi).

(v) *Consistente completezza.* Immediata.

(vi) *Distributività.* Segue dalla distributività insiemistica, osservando semplicemente che $\sqcap A = \cap A$ per ogni insieme non vuoto A.

Fino a questo punto, abbiamo dimostrato che Dom($\mathcal{T}$) è un dominio di Scott distributivo. Per l'atomicità, chiaramente:

$$D^A = \{\{x\}, x \in X\}.$$

ed inoltre, per ogni insieme consistente Y, abbiamo $K^A(Y) = \{\{x\}, x \in Y\}$ e così $\sqcup K^A(Y) = \cup_{x \in Y}\{x\} = Y$.

Per la parte rimanente, dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Clique}(f) = \langle f_e, f_p \rangle$ è una coppia immersione-proiezione stabile, ogni volta che $f : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ è un'immersione di gts. Si osservi in primo luogo che, se Y_0, Y_1 sono sottoinsiemi consistenti di $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$, allora $f_e(Y_0), f_p(Y_1)$ sono anch'essi consistenti, a causa della definizione di immersione. Monotonicità e continuità seguono dal fatto che f_e e f_p sono semplicemente ottenuti come estensioni insiemistiche di f e f^{-1}. Per la proprietà delle coppie immersione-proiezione stabili si ha quanto segue; sia Y_i un sottoinsieme consistente di $\mathcal{T}_i$ (per $i = 0, 1$):

- poiché f è iniettiva, si ha $f_p(f_e(Y_0)) = f^{-1}(f(Y_0)) = Y_0$, come richiesto;
- si supponga ora che $x \in f_e(f_p(Y_1))$; questo significa che $x = f(y)$ per qualche $y \in f^{-1}(Y_1)$, cioè $x = f(y)$ e $f(y) \in Y_1$, che a sua volta implica $x \in Y_1$. Perciò $f_e(f_p(Y_1)) \subseteq Y_1$;

- per la stabilità, si supponga che $Y_1 \subseteq f_e(Y_0)$, cioè $Y_1 \subseteq f(Y_0)$. Allora

$$f_e(f_p(Y_1)) = f(f^{-1}(Y_1)).$$

Se $x \in Y_1$, allora $x \in f(Y_0)$, e quindi $x = f(y)$ per qualche y. Quindi $y \in f^{-1}(Y_1)$, e perciò $x = f(y) \in f(f^{-1}(Y_1))$, come richiesto.

Quindi, Dom(f) è una coppia immersione-proiezione stabile. □

Inoltre, ogni dominio dI atomico è isomorfo al dominio di clique di qualche spazio di tolleranza generalizzato:

Lemma 4.3.5 *Sia $\mathcal{D}$ un dominio dI atomico. Esiste uno spazio di tolleranza generalizzato $\mathcal{T}$ tale che Dom$(\mathcal{T}) \cong \mathcal{D}$.*

Dimostrazione: Sia $X = D^\diamond$ e si definisca $A \in$ Con se e solo se $A \uparrow$. Ora, si consideri questo spazio di tolleranza, e si definisca:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathrm{Dom}(X) & \to & D \\ & Y & \mapsto & \sqcup Y. \end{array}$$

Si osservi che, se Y è un sottoinsieme consistente di X, allora è un sottoinsieme compatibile a coppie di D, e quindi $\sqcup Y$ esiste. Dobbiamo provare che φ è un isomorfismo d'ordine. La suriettività di φ segue direttamente dall'atomicità. Per l'iniettività, si supponga che $\varphi(Y) = \varphi(Y')$, cioè $\sqcup Y = \sqcup Y'$. Ora $K^A(\sqcup Y) = K^A(\sqcup Y')$ e quindi, usando il Lemma 3.4.1, $Y = Y'$. Chiaramente, se $Y \subseteq Y'$ allora $\sqcup Y \sqsubseteq \sqcup Y'$, e quindi φ è monotona. Per il viceversa, si assuma che $\sqcup Y \sqsubseteq \sqcup Y'$; allora $K^A(\sqcup Y) = K^A(\sqcup Y')$ e quindi (usando il Lemma 3.4.1) $Y \subseteq Y'$. □

Ancora una volta, Dom dà un'equivalenza categoriale, come spiegato nel seguente:

Teorema 4.3.4 *Il funtore Dom è un'equivalenza categoriale fra le categorie* **GTolSp** *e* **AdIDom**.

Dimostrazione: Usando il Teorema A.1.1, per i Lemmi 4.3.1 e 4.3.5, dobbiamo solo dimostrare che Dom è pieno e fedele. Per la fedeltà, siano $f, g : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ due immersioni tali che Dom$(f) =$ Dom(g). Si noti che, per ogni $x \in X_0$, $f(x)$ è il solo elemento di $f(\{x\}) = f_e(\{x\})$. Poiché $f_e = g_e$ si ha $f = g$ come richiesto.
La dimostrazione che Dom sia pieno è essenzialmente identica a quella indicata per il Teorema 4.3.2, e quindi viene omessa. □

Come corollario, otteniamo infine:

Corollario 4.3.2 *Dom$(\mathcal{T}_U)$ è il dominio dI atomico universale omogeneo.*

Dimostrazione: Per il Teorema 4.3.3, usando il Teorema 4.3.4 e considerando l'Osservazione A.1.1. □

Questo dà una costruzione diretta del dominio dI atomico universale omogeneo, che può semplicemente essere ottenuto come dominio di clique del gts universale omogeneo descritto nella sezione precedente.

4.3.5 Una costruzione universale per strutture di eventi con abilitazione minima

I concetti di spazio di tolleranza e spazio di tolleranza generalizzato hanno entrambi a che fare con il problema di definire la "consistenza": nel primo caso l'(in)consistenza è data da una relazione binaria (e i soli insiemi consistenti sono quelli che sono clique di questa relazione di base), e nel secondo caso è data da un predicato finitario. Non è difficile vedere che questi sono in realtà casi speciali di un tipo molto più generale di struttura dove, accanto alla consistenza, si prende in considerazione anche l'abilitazione. Queste strutture, introdotte in [Win80], sono un soggetto ben studiato in teoria dei domini, che trova molte applicazioni sia in semantica denotazionale [Dro91, Dro89] (con il fine di ottenere teoremi di rappresentazione per varie classi di domini), che nella teoria della concorrenza [NPW81, RT91, Win87, BCS93] (dove le strutture di eventi sono un modo paradigmatico per rappresentare i processi in modo "truly concurrent"). Discuteremo in seguito in maggior dettaglio la nozione di struttura di eventi, prendendo in considerazione alcune varianti di questa nozione.

Per gli scopi di questa sezione, introdurremo semplicemente la definizione di struttura di eventi generale e quella di struttura di eventi con abilitazione minima, e forniremo un oggetto universale omogeneo per quest'ultima categoria. Rinviamo ad una successiva sezione il problema di stabilire se questo sia sufficiente per dare anche un oggetto universale per la corrispondente categoria di domini.

Una *struttura di eventi* [Win80] è una tripla $\mathcal{E} = (E, \mathrm{Con}, \vdash)$ dove (E, Con) è uno spazio di tolleranza generalizzato[3] (gli elementi di E si chiamano "eventi"), $\vdash \subseteq \mathrm{Con} \times E$ è la relazione di abilitazione che soddisfa la seguente "condizione di ereditarietà":

$$A \vdash e, A \subseteq B \in \mathrm{Con} \implies B \vdash e.$$

Un insieme $X \subseteq E$ è una *configurazione* (o uno stato) di $\mathcal{E}$ se e solo se

1. X è un insieme consistente, cioè $\wp_{\mathrm{fin}}(X) \subseteq \mathrm{Con}$;
2. per ogni $x \in X$ esiste una *catena assicurante*, cioè una sequenza $x_1, x_2, \ldots, x_n = x \in X$ tale che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, vale che $\{x_j, 1 \leq j < i\} \vdash x_i$.

L'insieme delle configurazioni di $\mathcal{E}$ si denota con $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Usiamo lo stesso simbolo per denotare il corrispondente poset rispetto all'inclusione insiemistica[4].

Una struttura di eventi $\mathcal{E}$ ha la *proprietà di abilitazione minima* (o, in una sigla, è una MeES) se e solo se per ogni $e \in E$ una delle seguenti proprietà vale:

1. o non esiste un $A \in \mathrm{Con}$ tale che $A \vdash e$;
2. oppure, posto $\mu_e = \cap_{A \in \mathrm{Con}, A \vdash e} A$, accade che $\mu_e \vdash e$ (μ_e è detto la minima abilitazione di e); detto altrimenti, l'insieme $\{A \in \mathrm{Con} : A \vdash e\}$ ha un minimo elemento μ_e.

[3] Per la precisione, questa non è esattamente la definizione data in [Win80], perché qui richiediamo che ogni singoletto sia consistente. Naturalmente questo non ha conseguenze quando si considerino le configurazioni, perché gli eventi che non sono essi stessi consistenti semplicemente non appariranno mai in una configurazione.

[4] Rinviamo alle sezioni successive la discussione su quali siano i domini che possono essere generati come poset di configurazioni di strutture di eventi; per ora siamo solo interessati alla loro struttura "sintattica".

In altre parole, o e non può essere affatto abilitato, oppure esiste un solo modo minimo di abilitarlo (ogni altro insieme di eventi che lo abilita dovrà contenere quella minima abilitazione). Questa definizione assomiglia a quella di struttura di eventi stabile, ma non è esattamente la stessa, sebbene le due coincidano completamente per quanto riguarda la struttura dei domini di configurazioni. Semmai è simile alla definizione di struttura di eventi prima [BCS93, NPW81], in cui l'abilitazione minima è semplicemente l'ideale principale generato nell'ordine causale dall'evento dato.

In questa sezione generalizzeremo ulteriormente le nostre costruzioni ed otterremo in questo modo una struttura di eventi con abilitazione minima universale omogenea. A questo scopo, definiamo i concetti di omomorfismo ed immersione per una struttura di eventi. Un *omomorfismo* di strutture di eventi $f : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ è semplicemente una funzione gts-continua $f : (E_0, \mathrm{Con}_0) \to (E_1, \mathrm{Con}_1)$ tale che inoltre

$$\forall A \in \mathrm{Con}_0 \forall e \in E_0.\, A \vdash_0 e \implies f(A) \vdash_1 f(e).$$

Diremo che f è un'*immersione* se e solo se è un'immersione degli spazi di tolleranza generalizzati soggiacenti ed inoltre

$$\forall A \in \mathrm{Con}_0 \forall e \in E_0.\, A \vdash_0 e \iff f(A) \vdash_1 f(e).$$

La categoria delle MeES al più numerabili con immersioni verrà indicata con **MeES**.

Data una MeES $\mathcal{E}$ ed un sottoinsieme $Y \subseteq E$, si definisca $\mathcal{E}^Y$ come la struttura $(Y, \mathrm{Con}^Y, \vdash^Y)$, in cui $\mathrm{Con}^Y = \mathrm{Con} \cap \wp_{\mathrm{fin}}(Y)$ e $\vdash^Y = \vdash \cap (\mathrm{Con}^Y \times Y)$. In questo caso, è necessaria qualche attenzione per verificare che $\mathcal{E}^Y$ è effettivamente ancora una MeES:

Lemma 4.3.6 *Sia $\mathcal{E}$ una MeES, e $Y \subseteq E$. Allora $\mathcal{E}^Y$ è una MeES, e se $e \in Y$ ha un'abilitazione in $\mathcal{E}^Y$ allora $\mu_e^Y = \mu_e$.*

Dimostrazione: La sola parte non banale è l'esistenza dell'abilitazione minima. Per assurdo, supponiamo che $A, B \in \mathrm{Con}^Y$ siano tali che $A \vdash^Y e$ e $B \vdash^Y e$, entrambi in modo minimale (cioè, nessun sottoinsieme proprio di A o B abilita e), e che $A \neq B$. Allora anche $A \vdash e$ e $B \vdash e$, quindi $\mu_e \subseteq A \cap B \subseteq Y$, e perciò $\mu_e \vdash^Y e$, il che contraddice il fatto che A e B abilitino e in modo minimale. □

Questo lemma serve a dimostrare che **MeES** è una categoria incrementale, con estensioni ottenute aggiungendo un evento per volta. Si noti che, come nel caso degli spazi di tolleranza (generalizzati), il morfismo di inclusione è un'immersione di MeES.

Le proprietà principali della categoria **MeES** sono elencate nella seguente:

Proprietà 4.3.3 *Nella categoria* **MeES** *ogni freccia è monica, e un oggetto è finito se e solo se ha un insieme di eventi finito. Inoltre,* **MeES** *è una categoria algebroidale incrementale.*

Dimostrazione: La dimostrazione è analoga a quella delle Proprietà 4.3.1 e 4.3.2, usando il Lemma 4.3.6 per l'incrementalità. □

Costruiremo ora la MeES universale omogenea usando le stesse tecniche numeriche sviluppate nelle sezioni precedenti. Si costruisca la struttura di eventi $\mathcal{E}_U$ definendo $E_U = \omega$, e Con_U, $\vdash_U$ come segue:

- un insieme finito $A \subseteq \omega$ appartiene a Con_U se e solo se
  1. $|A| \leq 1$ oppure
  2. $|A| > 1$ e
     (a) per ogni $B \subset A$, $B \in \mathrm{Con}_U$;
     (b) il $2\Psi(A \setminus \{\max A\})$-esimo bit nell'espansione binaria di $\max A$ è un "1";
- $A \vdash_U e$ se e solo se $A \in \mathrm{Con}_U$ e, posto,

$$k_e = \min(\{k : \text{ il } (2k+1)\text{-esimo bit nell'espansione binaria di } e \text{ è un "1"}\} \cup \{0\}),$$

  si ha che $\Psi^{-1}(k_e) = \{B\}$ e $B \subseteq A$.

L'essenza dell'idea che sta dietro questa definizione è che ogni evento (numero) codifica nella sua espansione binaria tutta l'informazione relativa alla consistenza e all'abilitazione; in particolare, i bit in posizione pari vengono usati per codificare la consistenza (esattamente nello stesso modo dei gts), mentre il primo bit in posizione dispari è usato per codificare il minimo insieme abilitante. Si noti che i bit nelle altre posizioni dispari possono essere liberamente posti a "1": questo ci serve per provare la saturazione, perché ci occorrono infiniti eventi aventi la stessa consistenza e le stesse proprietà di abilitazione per poterli aggiungere ad ogni possibile passo dell'immersione in $\mathcal{E}_U$. Inoltre, si noti che, se nessun "1" dell'espansione binaria di e ha posizione dispari, oppure se il primo "1" di indice dispari corrisponde ad una posizione che non codifica un unico insieme, allora si assume che nessun insieme abiliti e.

Si osservi che:

Lemma 4.3.7 *La struttura $\mathcal{E}_U$ è una struttura di eventi con abilitazione minima.*

Dimostrazione: Solo la minima abilitazione richiede una dimostrazione. Si supponga che ci sia un insieme $A \in \mathrm{Con}_U$ tale che $A \vdash_U e$. Ciò significa che $\Psi^{-1}(k_e) = \{B\}$ con $B \subseteq A$. Ma allora $B \in \mathrm{Con}_U$ e chiaramente $B \vdash_U e$. Inoltre:

$$A \in \mathrm{Con}_U \ \wedge \ A \vdash_U e \implies B \subseteq A.$$

Quindi $\mu_e = \cap_{A \in \mathrm{Con}_U, A \vdash_U e} A = B \vdash_U e$ come richiesto. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare l'enunciato di universalità:

Teorema 4.3.5 *$\mathcal{E}_U$ è l'oggetto universale omogeneo della categoria* **MeES**.

Dimostrazione: Per la Proprietà 4.3.3, usando il Teorema 4.2.2, dobbiamo solo mostrare che $\mathcal{E}_U$ è incrementalmente saturata. Si può rienunciare questo come segue: siano $Y \subseteq_{\mathrm{fin}} E_U$, $A \in \mathrm{Con}_U^Y$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Con}_U^Y$ insiemi non vuoti; allora, dobbiamo trovare due elementi $x, y \in X_U \setminus Y$ tali che

$$\mathrm{Con}_U^{Y \cup \{x\}} \quad = \quad \mathrm{Con}_U^Y \cup \{B \cup \{x\}, B \in \mathcal{C}\}$$

e lo stesso vale per y, ed inoltre

$$\begin{array}{rcl}\vdash_U^{Y\cup\{x\}} & = & \vdash_U^Y \cup\{(B\cup\{x\},e) : e\in Y, B\vdash_U^Y e, B\cup\{x\}\in \mathrm{Con}_U^{Y\cup\{x\}}\}\\ \vdash_U^{Y\cup\{y\}} & = & \vdash_U^Y \cup\{(B,y) : A\subseteq B\in \mathrm{Con}_U^{Y\cup\{y\}}\}\cup\\ & & \cup\{(B\cup\{y\},e) : e\in Y, B\vdash_U^Y e, B\cup\{y\}\in \mathrm{Con}_U^{Y\cup\{y\}}\}.\end{array}$$

Prima di proseguire in questa dimostrazione, dobbiamo spiegare perché questo sia equivalente a dimostrare la proprietà di saturazione incrementale. L'idea è che $\mathcal{C}$ rappresenti l'insieme degli insiemi consistenti con cui vogliamo mantenere la consistenza aggiungendo il nuovo elemento, mentre A rappresenta l'insieme di abilitazione minima per il nuovo evento. In effetti, questo vale per y, mentre x è un nuovo evento che non ha alcuna abilitazione, e noi vogliamo essere sicuri che possiamo comunque trovarne uno.

Esistenza di y. Si prenda

$$y = 2^{2+2\Psi(Y)} + \sum_{B\in\mathcal{C}} 2^{2\Psi(B)} + 2^{1+2\Psi(A)}.$$

Dimostriamo separatamente le due parti relative a consistenza ed abilitazione.

Consistenza: inclusione da sinistra a destra. Si supponga che $B\in \mathrm{Con}_U^{Y\cup\{y\}}$. Se $B\subseteq Y$ allora $B\in\mathrm{Con}_U^Y$. (Si noti che $Y\geq 2^{2+2\Psi(Y)} > \Psi(Y)$ e quindi $y\notin Y$). Si supponga ora che $y\in B$. Allora la consistenza di B implica che (essendo $B\setminus\{y\}\subseteq Y \implies y=\max B$) il $2\Psi(B\setminus\{y\})$-esimo bit di y è un "1". Questo significa che $B\setminus\{y\}\in\mathcal{C}$ (per definizione di y) e quindi $B\in\{C\cup\{y\}, C\in\mathcal{C}\}$, come richiesto.

Consistenza: inclusione da destra a sinistra. Chiaramente $\mathrm{Con}_U^Y = \mathrm{Con}_U\cap\wp_{\mathrm{fin}}(y)\subseteq \mathrm{Con}_U\cap\wp_{\mathrm{fin}}(Y\cup\{y\}) = \mathrm{Con}_U^{Y\cup\{y\}}$. Ora, si supponga che $B\in\mathcal{C}$: dimostriamo che $B\cup\{y\}\in \mathrm{Con}_U$. Ma $B\in\mathcal{C} \implies B\subseteq Y \implies y=\max(B\cup\{y\})$. Quindi, per dimostrare che $B\cup\{y\}\in\mathrm{Con}_U$, abbiamo i seguenti casi:

1. se $B=\emptyset$, il risultato segue banalmente;

2. altrimenti, prima dobbiamo controllare che il $\Psi(B)$-esimo bit di y sia un "1" (che è vero, essendo $B\in\mathcal{C}$); allora, sia $C\subseteq B$. Per dimostrare che $C\in\mathrm{Con}_U$, si supponga che $y\in C$ (l'altro caso è banale, essendo $B\in\mathrm{Con}_U$). Il risultato è ovvio per ragioni simili.

Abilitazione: inclusione da sinistra a destra. Si supponga $B\vdash_U^{Y\cup\{y\}} e$. Se $B\subseteq Y$ e $e\neq y$, allora anche $B\vdash_U^Y e$. Per gli altri casi:

1. si supponga $e=y$; allora $B\vdash_U^{Y\cup\{y\}} y$, e quindi $B\vdash_U y$, e quindi $\Psi^{-1}(k_y)=\{C\}$ e $C\subseteq B$. Ma $k_y=\Psi(A)$, così $\Psi^{-1}(k_y)=\Psi^{-1}(\Psi(A))=\{A\}$ e quindi $A\subseteq B$, come richiesto;

2. il caso rimanente è quando $y\in B$ e $e\neq y$. Allora $B=C\cup\{y\}$ (con $C\subseteq Y$) e $B\vdash_U^{Y\cup\{y\}} e\neq y$. Si supponga che $\neg(C\vdash_U^Y e)$, e sia $\Psi^{-1}(k_e)=\{D\}$. Chiaramente $D\subseteq B$ ma $D\nsubseteq C$, e quindi necessariamente $y\in D$. Quindi $k_e=\Psi(D)\geq y$, e perciò nell'espansione binaria di e c'è un bit "1" in una posizione di indice maggiore o uguale a $2y+1$. Quindi $e\geq 2^{1+2y}$. Eppure $e\in Y$ e quindi $e\leq\Psi(Y)$; quindi necessariamente $2^{1+2y}\leq\Psi(Y)$. Ma $y\geq 2^{2+2\Psi(Y)}$ perciò $2^{1+2y}\geq 2^{1+2^{3+2\Psi(Y)}}$ che è maggiore di $\Psi(Y)$. Quindi, per assurdo, risulta $C\vdash_U^Y e$.

Abilitazione: inclusione da destra a sinistra. Si noti che $\vdash_U^Y$ è uguale a $\vdash_U \cap(\wp_{\text{fin}}(Y) \times Y)$ che è incluso in $\vdash_U \cap(\wp_{\text{fin}}(Y \cup \{y\}) \times (Y \cup \{y\}))$ che è uguale a $\vdash_U^{Y \cup \{y\}}$. Per il secondo caso, si supponga che $B \in \text{Con}_U^{Y \cup \{y\}}$ e $A \subseteq B$. Dobbiamo dimostrare che $B \vdash_U^{Y \cup \{y\}} y$, cioè che $B \vdash_U y$. Per farlo, dobbiamo avere che $\Psi^{-1}(k_y) = \{D\}$ con $D \subseteq B$. Ma $k_y = \Psi(A)$, e quindi $\Psi^{-1}(k_y) = \{A\}$, e $A \subseteq B$ per ipotesi. Per l'ultimo caso, si supponga che $B \vdash_U^Y e$ e $B \cup \{y\} \in \text{Con}_U^{Y \cup \{y\}}$. Allora $B \cup \{y\} \vdash_U^{Y \cup \{y\}} e$, come richiesto.

Esistenza di x. Sia $q \notin \Psi(\wp_{\text{fin}}(A))$ (esiste, essendo Ψ non suriettiva). Si definisca:

$$x = 2^{2+2\Psi(Y)} + \sum_{B \in \mathcal{C}} 2^{2\Psi(B)} + 2^{1+2q}.$$

La dimostrazione per la consistenza è esattamente la stessa che per y, e viene pertanto omessa.

Abilitazione: inclusione da sinistra a destra. Si supponga che $B \vdash_U^{Y \cup \{x\}} e$. Se $B \subseteq Y$ e $e \neq x$, allora $B \vdash_U^Y e$. Quindi consideriamo gli altri casi:

1. se $e = x$ allora $B \vdash_U x$ che implica $\Psi^{-1}(k_x) = \{D\}$ con $D \subseteq B$. Ma $k_x = q$ e $\Psi^{-1}(q) = \emptyset$ per definizione;
2. supponete che $x \in B$ e $e \neq x$. Sia $C = B \setminus \{x\} \in \text{Con}_U^Y$. Dobbiamo dimostrare che $C \vdash_U e$. Si supponga che $\neg(C \vdash_U e)$ ma $B \vdash_U e$. Allora $\Psi^{-1}(k_e) = \{D\}$ con $D \subseteq B$ ma $D \nsubseteq C$. Quindi $x \in D$, e perciò $k_e = \Psi(D) \geq x$. Quindi, nell'espansione binaria di e c'è un bit "1" in una posizione che è di indice non inferiore a $2x + 1$, cioè $e \geq 2^{1+2x}$. Ma $e \in Y$ e quindi $e \geq \Psi(Y)$; perciò, necessariamente, $2^{1+2x} \geq \Psi(Y)$. Ma $x \geq 2^{2+2\Psi(Y)}$ e quindi $2^{1+2x} \geq 2^{1+2^{3+2\Psi(Y)}}$ che è maggiore di $\Psi(Y)$. Quindi, per assurdo, si ottiene $C \vdash_U^Y e$.

Abilitazione: inclusione da destra a sinistra. È immediato verificare che $\vdash_U^Y \subseteq \vdash_U^{Y \cup \{x\}}$. Ora, si supponga che $B \vdash^Y e$, con $e \in Y$ e $B \cup \{x\} \in \text{Con}_U^{Y \cup \{x\}}$. Allora anche $B \cup \{x\} \vdash_U^{Y \cup \{x\}} e$, come richiesto. □

Sorge ora spontaneamente il quesito relativo alla possibilità di usare questa costruzione anche per ottenere un dominio universale omogeneo di qualche tipo, provando un'equivalenza fra la categoria **MeES** e una categoria di domini. Daremo una risposta (negativa) a questa domanda nella sezione successiva.

4.3.6 MeES e la categoria dei domini dI

In questa sezione, forniremo un teorema di rappresentazione per la classe dei domini dI, dimostrando che il dominio di configurazioni di una MeES è sempre un dominio dI, e viceversa che ogni dominio dI si può ottenere come dominio di configurazioni di una struttura di questo tipo. La dimostrazione è del tutto standard, e simile, per le tecniche usate, a quelle presentate per esempio in [Win80] o [NPW81].

Dimostriamo prima il verso più facile:

Teorema 4.3.6 *Per ogni MeES $\mathcal{E}$, il poset $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (rispetto all'ordine di inclusione) è un dominio dI.*

Dimostrazione: (Prima parte) Sia $\mathcal{D} = \mathcal{L}(\mathcal{E})$; dimostriamo in primo luogo che $\mathcal{D}$ è un cpo. Chiaramente $\mathcal{D}$ contiene un elemento minimo, cioè la configurazione vuota $\emptyset$. Si supponga ora che $S \subseteq D$ sia un insieme diretto di configurazioni, e si ponga $X = \cup S$: dobbiamo mostrare che anche X è una configurazione. Se $A \subseteq_{\text{fin}} X$, diciamo $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, allora ogni x_i è incluso in qualche configurazione di S: per direttezza di S, ci deve essere qualche $Y \in S$ tale che $A \subseteq Y$, e quindi $A \in \text{Con}$. Ora si supponga che $e \in X$; allora $e \in Y$ per qualche $Y \in S$, e quindi Y contiene una catena assicurante $e_1, e_2, \ldots, e_n = e$ per e, e questa sarà anche una catena assicurante per e in X.
Per la consistente completezza, sia $S \subseteq D$ un insieme di configurazioni dotato di maggiorante: ciò significa che esiste una configurazione X tale che $\cup S \subseteq X$. Ora, sia $Y = \cup S$: dimostreremo che Y è una configurazione, che è naturalmente l'estremo superiore di Y. Ogni sottoinsieme finito di Y è anche un sottoinsieme finito di X, e quindi deve essere consistente. Inoltre, se $e \in Y$, allora e appartiene a qualche configurazione di S, e la stessa configurazione deve perciò contenere una catena assicurante per e: questa è anche una catena assicurante per e in Y. Quindi, infine, $Y \in \mathcal{D}$.
Ora vogliamo dimostrare che una configurazione è compatta se e solo se è finita. È immediato vedere che ogni configurazione finita è compatta. Per il viceversa, si supponga che X sia compatta; costruiamo una sequenza $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ di sottoinsiemi di X come segue:

- poniamo $X_0 = \emptyset$;
- se $X = X_k$ allora sia $X_{k+1} = X_k$; altrimenti, si scelga un elemento $e \in X \setminus X_k$ e sia $e_1, \ldots, e_n = e$ una catena assicurante di e in X. Si ponga $X_{k+1} = X_k \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Si noti che ogni X_i è una configurazione finita, ed inoltre ad ogni passo la cardinalità viene strettamente incrementata (a meno che X sia finito, nel qual caso la sequenza diventa costantemente uguale a X da un certo indice in poi). Poiché $X = \cup_{i \in \omega} X_i$, per compattezza di X, si ha $X \subseteq X_i$, e quindi X deve essere finito.
Per ogni configurazione X, l'insieme $K(X)$ è diretto (l'unione di due configurazioni finite compatibili è una configurazione finita), e il suo estremo superiore è X (ogni evento appare in qualche sottoconfigurazione finita di X). Quindi l'ω-algebricità è garantita. Inoltre, $\mathcal{D}$ è finitaria, poiché una configurazione finita può avere solo un numero finito di sottoconfigurazioni (in effetti, sottoinsiemi).

Fino ad ora, abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}$ è un dominio di Scott finitario, dove gli estremi superiori di insiemi diretti (o compatibili) vengono ottenuti semplicemente come unioni insiemistiche, e i compatti sono solo le configurazioni finite.

Dobbiamo ancora dimostrare la distributività. Prima di procedere in questa dimostrazione, ci servono alcune definizioni ed alcuni lemmi tecnici. Nel resto di questa sottosezione, assumeremo che $\mathcal{E}$ sia una MeES.
Una sequenza sicura per un evento $e \in E$ è una sequenza $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ tale che $e_k = e$ e, per ogni $i = 1, \ldots, k$ vale che $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \vdash e_i$. Definiamo $\text{ev}(\gamma) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ l'insieme degli eventi che compaiono nella sequenza γ. Se $A \subseteq E$ e $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ è una sequenza sicura, sia $\gamma \upharpoonright A$ la sottosequenza di γ costruita prendendo i soli elementi di γ che appartengono ad A, nel loro ordine.

Lemma 4.3.8 *Sia* Γ *un insieme di sequenze sicure per un evento* $e \in E$, *e sia* $\mathrm{ev}(\Gamma) = \cap_{\gamma\in\Gamma}\mathrm{ev}(\gamma)$. *Per ogni* $\gamma \in \Gamma$, *la sequenza* $\gamma \upharpoonright \mathrm{ev}(\Gamma)$ *è una sequenza sicura per* e.

Dimostrazione: Si supponga che $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_k = e)$; essendo $e \in \mathrm{ev}(\gamma)$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, abbiamo che $e \in \mathrm{ev}(\Gamma)$. Allora $\gamma \upharpoonright \mathrm{ev}(\Gamma) = (e'_1, \ldots, e'_h)$ sarà tale che $e'_h = e$. Ora, dobbiamo dimostrare che $\{e'_1, \ldots, e'_{i-1}\} \vdash e'_i$. Naturalmente, essendo $e'_i \in \mathrm{ev}(\gamma)$, ogni sequenza δ di Γ contiene e'_i da qualche parte, e perciò c'è un sottoinsieme del suo insieme di eventi che abilita e'_i, cioè c'è qualche $x_\delta \subseteq \mathrm{ev}(\delta)$ tale che $x_\delta \vdash e'_i$. Si consideri $x = \cap_{\delta\in\Gamma} x_\delta$: questo è chiaramente un sottoinsieme di $\mathrm{ev}(\Gamma)$, ed inoltre $\mu_{e'_i} \subseteq x$: così $x \vdash e'_i$. Ma $\{e'_1, \ldots, e'_{i-1}\} = x$, come richiesto. □

Possiamo perciò ottenere quanto segue:

Corollario 4.3.3 *Sia* $e \in E$ *un evento tale che esista una configurazione* $X \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ *con* $e \in X$. *Definiamo:*

$$\lceil e \rceil = \cap\{X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) : e \in X\}.$$

Avremo che $\lceil e \rceil \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Dimostrazione: La consistenza è immediata. Per l'abilitazione, sia $e' \in \lceil e \rceil$. Essendo $e' \in X$ per ogni $X \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ con $e \in X$, e' ha una sequenza sicura in X. Usando il risultato del Lemma 4.3.8, possiamo trovare una sequenza assicurante di e' anche in $\lceil e \rceil$ (prendendo Γ come l'insieme di tutte le sequenze sicure che corrispondono ai vari X nell'insieme). □

Inoltre:

Lemma 4.3.9 *L'insieme dei primi completi di* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ *è precisamente l'insieme delle configurazioni della forma*

$$\lceil e \rceil = \cap\{X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) : e \in X\}$$

dove quest'ultimo insieme sia non vuoto.

Dimostrazione: Si supponga per prima cosa che $S \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{E})$ sia un insieme compatibile e $\lceil e \rceil \subseteq \cup S$. Allora $e \in \lceil e \rceil \subseteq \cup S$, quindi $e \in X$ per qualche $X \in S$. Ma allora anche $\lceil e \rceil \subseteq X \in S$.
Per il viceversa, si supponga che X sia un primo completo. Si prenda l'insieme $A = \{\lceil e \rceil, e \in X\}$: questo è un insieme compatibile di configurazioni, e $X = \cup A$. Ma allora $X \subseteq \lceil e \rceil$ per qualche $e \in X$, e quindi $X = \lceil e \rceil$ per qualche evento e. □

Quindi, infine, otteniamo che:

Dimostrazione del Teorema 4.3.6 (continua): Se X è una configurazione, allora naturalmente $X = \cup_{e\in X}\lceil e \rceil$. Quindi $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ è algebrico primo e perciò, per il Teorema 3.4.1, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ è un dominio dI. □

Ora, il viceversa del Teorema 4.3.6 si può ottenere prendendo in considerazione la classe delle strutture di eventi prime, nel senso di [Win87]. Una struttura di eventi prima (generalizzata[5] (Winskel [Win87]) è una struttura $\mathcal{E} = (E, \mathrm{Con}, \leq)$ dove E e Con sono come nella definizione di una MeES, ed inoltre $\leq$ è un ordine parziale su E tale che:

[5] In seguito, avremo a che fare con altri tipi di strutture di eventi prime, con conflitto binario.

1. per ogni $e \in E$, l'insieme $\downarrow e = \{e' \in E : e' \leq e\}$ sia finito;

2. se $X \in \mathrm{Con}$ ed esiste $e' \in X$ tale che $e \leq e'$ allora $X \cup \{e\} \in \mathrm{Con}$.

Chiamiamo $\mathcal{L}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{E})$ l'insieme dei sottoinsiemi di $X \subseteq E$ tali che $\wp_{\mathrm{fin}}(X) \subseteq \mathrm{Con}$ e $\downarrow e \subseteq X$ per ogni $e \in X$. Gli elementi di $\mathcal{L}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{E})$ sono chiamati configurazioni della struttura di eventi prima $\mathcal{E}$. È noto che:

Teorema 4.3.7 (Winskel [Win87]) *Per ogni dominio dI $\mathcal{D}$, esiste una struttura di eventi prima (generalizzata) $\mathcal{E}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{D})$ tale che $\mathcal{L}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{D})) \cong \mathcal{D}$.* □

Quindi risulta:

Teorema 4.3.8 *Per ogni dominio dI $\mathcal{D}$, esiste una MeES $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ tale che $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathcal{D})) \cong \mathcal{D}$.*

Dimostrazione: Si consideri la struttura di eventi prima $\mathcal{E}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{D}) = (E, \mathrm{Con}, \leq)$ ottenuta dal Teorema 4.3.7. Ora, per ogni $X \in \mathrm{Con}$ e $e \in E$, si definisca $X \vdash e$ se e solo se $\downarrow e \setminus \{e\} \subseteq X$; sia $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = (E, \mathrm{Con}, \vdash)$. Dimostriamo per prima cosa che $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ è una MeES. Supponiamo che e venga abilitato in qualche modo: allora, esiste un $X \in \mathrm{Con}$ con $\downarrow e \subseteq X$, e perciò anche $\downarrow e \in \mathrm{Con}$, e quindi chiaramente $\downarrow e = (\cap_{X \vdash e} X) \cup \{e\}$. Così $\mu_e = \downarrow e \setminus \{e\} \vdash e$, come richiesto.
Ora, è immediato verificare che $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathcal{D})) = \mathcal{L}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{PR}}(\mathcal{D})) \cong \mathcal{D}$. □

Riassumendo, possiamo dire che i domini di configurazioni di MeES sono precisamente (a meno di isomorfismi) tutti e soli i domini dI. In altri termini, se **dIDom** è la categoria dei domini dI (al più numerabili), con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi, abbiamo una mappa

$$\mathcal{L} : \mathrm{Obj}(\mathbf{MeES}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{dIDom})$$

con la proprietà che ogni oggetto di **dIDom** è isomorfo a qualche oggetto nell'immagine di $\mathcal{L}$.

Al fine di dimostrare (o confutare) l'equivalenza fra le due categorie, dobbiamo estendere $\mathcal{L}$ ad un funtore: lo facciamo come segue. Supponiamo che $f : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ sia un'immersione di MeES: poniamo $\mathcal{L}(f) = \langle f_e, f_p \rangle$ dove $f_e(X) = f(X)$ e $f_p(Y) = f^{-1}(Y)$, per ogni $X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_0)$ e $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$.

Proprietà 4.3.4 *La definizione data estende la funzione $\mathcal{L}$ ad un funtore dalla categoria* **MeES** *alla categoria* **dIDom**.

Dimostrazione: La funzione è ben data; infatti, supponiamo per prima cosa che $X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_0)$. Dimostreremo che $f(X) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$: se $A \subseteq_{\mathrm{fin}} f(X)$, allora $A = f(B)$ per qualche $B \subseteq_{\mathrm{fin}} X$, e quindi $A \in \mathrm{Con}_1$. Inoltre, se $e_1, \ldots, e_k$ è una sequenza sicura in X, allora lo è anche $f(e_1), \ldots, f(e_k)$ in $f(X)$. (La prova per f_p è simile). È evidente che $\langle f_e, f_p \rangle$ è una coppia immersione-proiezione. Per la stabilità, si supponga che $Y \subseteq f_e(X) = f(X)$. Allora, si prendano solo quegli elementi x di X con $f(x) \in Y$, cioè si consideri $X' = X \cap f^{-1}(Y)$. Dobbiamo dimostrare che X' è una configurazione, il che è conseguenza del Lemma 4.3.8.
□

Quindi, $\mathcal{L}$ è un funtore: è anche pieno, come si può dimostrare usando le stesse tecniche adottate per il caso degli spazi di tolleranza (generalizzati) (Teoremi 4.3.2 e 4.3.4). Ma cosa possiamo dire della sua fedeltà?

La fedeltà può essere confutata in modo molto semplice. Per ogni due strutture di eventi con abilitazione minima $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$, si definisca nullify$(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ come la struttura ottenuta nel modo seguente:

- gli eventi sono l'unione (disgiunta) di E e E', più un evento speciale $*$;
- la consistenza è data dall'unione dei due predicati;
- l'abilitazione per gli eventi di E è la stessa che essi avevano in $\mathcal{E}$; ogni evento di E' ha la stessa abilitazione di prima, ma è richiesto che anche $*$ accada, e $*$ stesso non ha alcuna abilitazione.

In pratica, nullify$(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ è una struttura con lo stesso comportamento (configurazioni) di $\mathcal{E}$, ma che contiene anche una copia sintattica della struttura $\mathcal{E}'$ (che non genera alcuna configurazione, però, a causa della presenza dell'evento $*$, che opera come una sorta di "ostruzione"). Chiaramente, $\mathcal{L}(\text{nullify}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')) \cong \mathcal{L}(\mathcal{E})$ (e questa è in realtà un'uguaglianza). Se $f : \mathcal{E}'_0 \to \mathcal{E}'_1$ è un'immersione di MeES, possiamo estenderla ad un'immersione $\hat{f} : \text{nullify}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'_0) \to \text{nullify}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'_1)$ prendendo $\hat{f}$ uguale all'identità su $E \cup \{*\}$. Quindi $\mathcal{L}(\hat{f}) : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ è sempre l'identità, indipendentemente da come si scelga f. Questo dimostra che non solo $\mathcal{L}$ *non è fedele*, ma anche che non è fedele nemmeno per un oggetto scelto nell'immagine del funtore. Quindi, riassumendo:

Teorema 4.3.9 $\mathcal{L}$: **MeES** $\to$ **dIDom** *è un funtore pieno, ed ogni oggetto di* **dIDom** *è isomorfo a* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ *per qualche MeES* $\mathcal{E}$. *Ciò nonostante,* $\mathcal{L}$ non *è fedele, e quindi* non *è un'equivalenza categoriale.* □

Ciò nondimeno:

Corollario 4.3.4 $\mathcal{L}(\mathcal{E}_U)$ *è un oggetto universale di* **dIDom**.

Dimostrazione: Per ogni dominio dI $\mathcal{D}$, si consideri il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{L}(\mathcal{E}_U) & & \mathcal{E}_U \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "\mathcal{L}(f_U)\circ\phi"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathcal{D})) \arrow[u, "\mathcal{L}(f_U)"'] & & \mathcal{E}(\mathcal{D}) \arrow[u, "f_U"']
\end{tikzcd}$$

dove φ è l'isomorfismo fra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))$, la cui esistenza è assicurata dal Teorema 4.3.8, e $f_U : \mathcal{E}(\mathcal{D}) \to \mathcal{E}_U$ esiste per la proprietà di universalità di $\mathcal{E}_U$ (Teorema 4.3.5). Allora $\mathcal{L}(f_U) \circ \varphi$ dà la freccia richiesta. □

L'omogeneità di $\mathcal{L}(\mathcal{E}_U)$ non è garantita, quindi sarebbe interessante sapere se $\mathcal{L}(\mathcal{E}_U)$ sia anche omogeneo (cioè se sia isomorfo al dominio costruito in [Dro91]), ma questo sembra improbabile, a causa del modo che abbiamo usato per costruire l'oggetto omogeneo $\mathcal{E}_U$ nella categoria **MeES**.

Il problema, qui, è che le nostre tecniche per la costruzione di rappresentazioni universali omogenee sono essenzialmente basate sul grado di libertà consentito nella costruzione della struttura, e questo, d'altra parte, dà strutture che sono altamente non-canoniche. Questa è precisamente la ragione per cui non abbiamo un'equivalenza categoriale; naturalmente, potremmo pensare di superare questo problema imponendo "più struttura" sul versante delle rappresentazioni, per esempio dando maggiori vincoli nella definizione di MeES, ma in questo modo, anche se riuscissimo ad ottenere un'equivalenza categoriale, avremmo troppa struttura da considerare nella costruzione dell'oggetto universale omogeneo.

4.4 Un'applicazione alla soluzione di equazione ricorsive di dominio

In questa sezione, discuteremo brevemente come si possano utilizzare i risultati di universalità fin qui ottenuti per risolvere equazioni ricorsive di dominio. Non entreremo in tutti i dettagli delle costruzioni, e ci limiteremo al caso molto semplice dei domini dI atomici coerenti, anche se le tecniche che spiegheremo sono adatte ad essere applicate, con minime modifiche, a tutte le categorie sopra descritte.

4.4.1 Equazioni di dominio

Prima di iniziare, dobbiamo introdurre il problema, e lo facciamo senza alcuna pretesa di precisione o completezza: il lettore interessato può ottenere molte più informazioni relative alle equazioni di dominio e ad altre possibili tecniche risolutive consultando, per esempio, [GS90].

Data un'opportuna categoria di domini, si possono definire molte operazioni (cioè funtori) sulla categoria, ognuna delle quali corrisponde ad una particolare costruzione semantica. Per esempio, dati due domini $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_1$, si può considerare il nuovo dominio $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1$, i cui elementi sono semplicemente coppie di elementi (di D_0 e D_1) ordinati componente per componente. Questo corrisponde semplicemente a descrivere un "oggetto" costituito da due componenti, uno di "tipo" $\mathcal{D}_0$ e l'altro di "tipo" $\mathcal{D}_1$, e sembra essere la controparte semantica naturale di un tipico costrutto dei linguaggi di programmazione, come il **record** in Pascal, o lo **struct** in C; se la categoria considerata è chiusa rispetto a questi prodotti, allora $\times$ è un funtore della categoria, e ci si può per esempio domandare se ci sia qualche dominio $\mathcal{D}$ tale che $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Questa è un'equazione ricorsiva di dominio, e vorremmo trovarne una soluzione (minimale). Il problema di trovare soluzioni ad equazioni ricorsive di dominio (espresse in opportune categorie) è di primaria importanza nel campo della semantica denotazionale, dove ogni equazione di questo tipo corrisponde alla definizione effettiva di un tipo di dati ricorsivo (per esempio, di un albero, o di una lista, ecc.).

4.4.2 Rappresentazione di domini come punti del dominio universale

In questa sezione spiegheremo come si possa provare ad usare il risultato di universalità per risolvere equazioni ricorsive di dominio, rappresentando ogni dominio come un punto nel dominio universale, ed ogni operazione come una endofunzione continua (possibilmente "semplice") del dominio universale.

Prima di farlo, dimostriamo che la categoria **CAdIDom** è chiusa rispetto all'operazione di esponenziazione stabile. A questo fine, vediamo come si specializza il Lemma 3.2.1 nel caso di domini dI atomici coerenti (indotti da spazi di tolleranza).

Lemma 4.4.1 *Sia* $f \in [Clique(\mathcal{D}_0) \to_s Clique(\mathcal{D}_1)]$, C *una clique di* $\mathcal{D}_0$ *e* $y \in f(C)$. *Allora, esiste una clique finita* $C' \subseteq_{\text{fin}} C$ *tale che* $y \in f(C')$ *e, se* $C'' \subseteq_{\text{fin}} C$ *è tale che* $y \in f(C'')$, *allora* $C' \subseteq C''$.

Dimostrazione: Poiché $\{y\} \subseteq f(C)$, usiamo il Lemma 3.2.1 e poniamo $C' = M(f, C, \{y\})$. Avremo allora $C' \subseteq C$, $y \in f(C')$. Inoltre, se $C'' \subseteq_{\text{fin}} C$ e $y \in f(C'')$, allora necessariamente $C' \subseteq C''$. □

Ora, per ogni coppia di spazi di tolleranza $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$, sia $\mathcal{T} = [\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1]$ lo spazio di tolleranza definito come segue:

- l'insieme di supporto è $X = \{\langle C, y\rangle : C$ è una clique finita di $\mathcal{T}_0$, $y \in X_1\}$;
- definiamo $\langle C, y\rangle$ co $\langle C', y'\rangle$ se e solo se, ogni volta che $C \cup C'$ è una clique, vale che:
  1. y co y';
  2. se $y = y'$ allora $C = C'$.

Ciò che vogliamo dimostrare è che questo nuovo spazio è esattamente la rappresentazione dello spazio delle funzioni stabili. Per farlo, introduciamo un'altra definizione.

Se $f \in [\mathrm{Clique}(\mathcal{T}_0) \to_s \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_1)]$, si definisca la sua traccia $\mathrm{Tr}(f)$ come l'insieme di tutte le coppie $\langle C, y\rangle$ dove C è una clique finita di $\mathcal{T}_0$, $y \in f(C)$ e, ogni volta che $C' \subseteq C$ con $y \in f(C')$, accade che $C = C'$.

Per prima cosa, si noti che $\mathrm{Tr}(f)$ è sempre una clique di $[\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1]$, come spiegato da:

Lemma 4.4.2 *L'insieme* $\mathrm{Tr}(f)$ *è una clique di* $[\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1]$.

Dimostrazione: Sia $\langle C, y\rangle, \langle C', y'\rangle \in \mathrm{Tr}(f)$ e si supponga che $C \cup C'$ sia una clique. Allora, per monotonicità di f, $f(C) \cup f(C') \subseteq f(C \cup C')$, per cui $y, y' \in f(C \cup C')$ e quindi y co y'. Inoltre, se $y = y'$ allora, per definizione di $\mathrm{Tr}(f)$, non vale né $C \subset C'$ né $C' \subset C$. Per stabilità, essendo $C \uparrow C'$, si ha $f(C \cap C') = f(C) \cap f(C')$: ma $y \in f(C) \cap f(C')$, e quindi $y \in f(C \cap C')$, il che contraddice la minimalità. □

La funzione Tr ha due importanti proprietà, espresse dai seguenti lemmi:

Lemma 4.4.3 *La funzione* $\mathrm{Tr} : [Clique(\mathcal{T}_0) \to_s Clique(\mathcal{T}_1)] \to Clique([\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1])$ *è iniettiva.*

Dimostrazione: Si supponga $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(g)$, e sia D una clique di $\mathcal{T}_0$ e $y \in f(D)$. Allora, per il Lemma 4.4.1, c'è una clique finita $C \subseteq D$ tale che $y \in f(C)$ e $y \notin f(C')$ per ogni $C' \subset C$. Quindi $\langle C, y\rangle \in \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(g)$; ma questo significa che $y \in g(C')$ e quindi, per monotonicità di g, anche $y \in g(D)$. Quindi, infine, $f(D) = g(D)$. □

Lemma 4.4.4 *La funzione* Tr *è suriettiva.*

Dimostrazione: Sia F una clique di $[\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1]$: dobbiamo costruire una funzione stabile $f : \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_0) \to \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_1)$ tale che $\mathrm{Tr}(f) = F$. Sia, per ogni clique D di $\mathcal{T}_0$,

$$f(D) = \{y \in X_1 : \langle C, y\rangle \in F \text{ per qualche } C \subseteq_{\mathrm{fin}} D\}.$$

Banalmente f è monotona; per la continuità, sia S un insieme diretto di clique; $y \in f(\cup S)$ se e solo se $\langle C, y\rangle \in F$ per qualche $C \subseteq_{\mathrm{fin}} \cup S$, il che succede, per direttezza, se e solo se $C \subseteq_{\mathrm{fin}} D$ per qualche $D \in S$. Questo è equivalente a dire che $y \in \cup f(S)$, come richiesto.
Per stabilità, si supponga che $D \uparrow D'$, e sia $y \in f(D) \cap f(D')$. Ciò significa che c'è qualche $C \subseteq_{\mathrm{fin}} D$ e $C' \subseteq_{\mathrm{fin}} D'$ con $\langle C, y\rangle, \langle C', y'\rangle \in F$. Ma $C \cup C'$ è una clique, e quindi necessariamente $C = C'$. Perciò $C \subseteq_{\mathrm{fin}} D \cap D'$ e $\langle C, y\rangle \in F$, che a sua volta implica $y \in f(D \cap D')$.
Ora, si supponga che $\langle C, y\rangle \in F$; allora chiaramente $y \in f(C)$: si noti che non possiamo avere $y \in f(C')$ per qualche $C' \subset C$, perché altrimenti ci sarebbe qualche $C'' \subset C$ finito con $\langle C'', y\rangle, \langle C, y\rangle \in F$ (che contraddice il fatto che F sia una clique). Quindi $\langle C, y\rangle \in \mathrm{Tr}(f)$.
Viceversa, se $\langle C, y\rangle \in \mathrm{Tr}(f)$, allora $y \in f(C)$ e $y \notin f(C')$ per ogni $C' \subset C$. Ciò significa che c'è qualche $C'' \subseteq C$ con $\langle C'', y\rangle \in F$ ma questo non è vero per alcun $C'' \subset C$. Dunque $\langle C, y\rangle \in F$, come richiesto. $\square$

In effetti, Tr è proprio un isomorfismo (d'ordine):

Teorema 4.4.1 *La funzione* $\mathrm{Tr} : [\mathit{Clique}(\mathcal{T}_0) \to_s \mathit{Clique}(\mathcal{T}_1)] \to \mathit{Clique}([\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1])$ *è un isomorfismo.*

Dimostrazione: La funzione Tr è ben definita, come provato nel Lemma 4.4.2; inoltre, è una biiezione (per i Lemmi 4.4.3 e 4.4.4).
Se $f \sqsubseteq_s g$ allora si supponga $\langle C, y\rangle \in \mathrm{Tr}(f)$: ciò significa che $y \in f(C)$ e $y \notin f(C')$ per ogni $C' \subset C$. Sappiamo che $f(C) = f(C) \cap g(C)$, e quindi $y \in g(C)$. Inoltre, si supponga che C' sia tale che $C' \subseteq C$ e $y \in g(C')$: allora $f(C') = f(C) \cap g(C')$ e quindi $y \in f(C')$: questo implica $C' = C$. Perciò $\langle C, y\rangle \in \mathrm{Tr}(g)$.
Ora, per il viceversa, consideriamo due clique $C' \subseteq C \in \mathrm{Clique}(\mathcal{D}_0)$. Dobbiamo dimostrare che $f(C') = f(C) \cap g(C')$. Se $y \in f(C')$, per il Lemma 4.4.1, c'è un $C'' \subseteq_{\mathrm{fin}} C'$ tale che $y \in f(C'')$ e C'' è minimale con questa proprietà. Quindi $\langle C'', y\rangle \in \mathrm{Tr}(f) \subseteq \mathrm{Tr}(g)$; perciò $y \in g(C'')$ che implica per monotonicità che $y \in g(C')$. Anche $y \in f(C)$ per monotonicità, e quindi $y \in f(C) \cap g(C')$. Viceversa, se $y \in f(C) \cap g(C')$, allora per il Lemma 4.4.1 c'è un $D \subseteq_{\mathrm{fin}} C$ minimale con $y \in f(D)$, e un $D' \subseteq_{\mathrm{fin}} C'$ minimale tale che $y \in g(D')$. Allora $\langle D, y\rangle \in \mathrm{Tr}(f) \subseteq \mathrm{Tr}(g)$ e $\langle D', y'\rangle \in \mathrm{Tr}(g)$. Ma $D \cup D' \subseteq C \cup C' \subseteq C$, che è una clique: poiché $\mathrm{Tr}(g)$ è una clique di $[\mathcal{T}_0 \to_s \mathcal{T}_1]$, si deve avere $D = D'$. Perciò $\langle D', y\rangle \in \mathrm{Tr}(f)$, e quindi $y \in f(D')$ che implica, per monotonicità, $y \in f(C')$. $\square$

Questo in particolare ci dice che lo spazio delle funzioni stabili $[\mathcal{D}_0 \to_s \mathcal{D}_1]$ è un dominio dI coerente, ogni volta che $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_1$ lo sono.

A questo punto, abbiamo preparato la strada per rendere possibile la codifica di ogni dominio dI coerente atomico come un punto del dominio universale $\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \mathrm{Clique}(\mathcal{T}_{\mathrm{R}})$. Infatti, considerate un qualsiasi dominio dI atomico coerente $\mathcal{D}$; per la proprietà di universalità, ci sarà una coppia immersione-proiezione stabile $\langle e, p\rangle : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ che in qualche

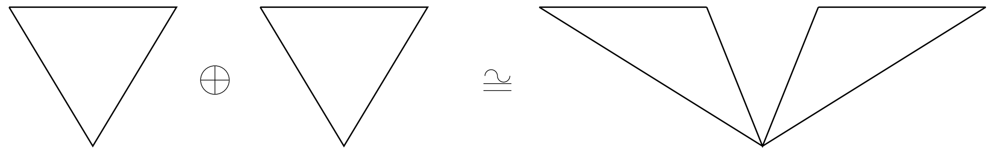


Figura 4.1: La somma coalescente di due domini.

modo "rappresenta" $\mathcal{D}$ come un sottodominio del dominio universale. Ora, usando il Lemma 3.3.1, sappiamo che e e p sono entrambe stabili, e quindi (essendo la composizione di due funzioni stabili a sua volta stabile) $\pi_{\mathcal{D}} = e \circ p : \mathcal{D}_{\mathrm{R}} \to \mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ sarà una funzione stabile. Ma allora $\pi_{\mathcal{D}} \in [\mathcal{D}_{\mathrm{R}} \to_s \mathcal{D}_{\mathrm{R}}]$, e $[\mathcal{D}_{\mathrm{R}} \to_s \mathcal{D}_{\mathrm{R}}]$ è anch'esso un dominio dI coerente atomico, per conseguenza del Teorema 4.4.1, e perciò si può immergere in $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ mediante qualche coppia $\langle e_{\to_s}, p_{\to_s} \rangle : [\mathcal{D}_{\mathrm{R}} \to_s \mathcal{D}_{\mathrm{R}}] \to \mathcal{D}_{\mathrm{R}}$. Dunque $e_{\to_s}(\pi_{\mathcal{D}})$ è un punto di $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ che rappresenta fedelmente il dominio $\mathcal{D}$.

A questo punto, si può provare a rappresentare ogni operazione rilevante come un'endofunzione di $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$, e risolvere equazioni ricorsive di dominio non *a meno di isomorfismo* nella categoria **CAdIDom**, ma *a meno di uguaglianza* entro il dominio $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$. Non approfondiamo oltre questa tecnica, ma ci limitiamo ad osservare che questa procedura di "codifica/decodifica" permette di usare risultati standard di teoria dei domini come il Teorema di Knaster-Tarski per ottenere soluzioni ad equazioni ricorsive di dominio.

4.4.3 Un approccio più diretto — Soluzione di $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \oplus \mathbb{I}$

In quest'ultimo paragrafo suggeriamo semplicemente come si possa usare un approccio più diretto alla soluzione di equazione ricorsive di dominio, utilizzando le proprietà speciali numeriche usate per costruire il dominio universale.

Al fine di farlo, consideriamo un esempio-giocattolo che coinvolge l'uso di una speciale operazione di dominio, chiamata somma coalescente. La *somma coalescente* di due domini $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_1$ è il dominio $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$ definito come segue:

- $D = ((D_0 \setminus \{\bot_0\}) \times \{0\}) \cup ((D_1 \setminus \{\bot_1\}) \times \{1\}) \cup \{\bot\}$;
- $t \sqsubseteq t'$ se e solo se ($t = \langle x, 0\rangle$, $t' = \langle x', 0\rangle$ e $x \sqsubseteq_0 x'$) oppure ($t = \langle y, 1\rangle$, $t' = \langle y', 1\rangle$ e $y \sqsubseteq_1 y'$) oppure $t = \bot$.

Quest'operazione è evidenziata in Fig. 4.1: in pratica, la somma coalescente corrisponde semplicemente all'unione disgiunta dei due domini, modulo l'identificazione dei due elementi bottom.

Ora, sia $\mathbb{I}$ lo spazio di Sierpinski, cioè l'unico dominio di due elementi $\mathbb{I} = \{\bot, \top\}$. Come si può risolvere l'equazione ricorsiva di dominio $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \oplus \mathbb{I}$ nella categoria **CAdIDom**?

Un modo per farlo è il seguente: per prima cosa, si osservi che ogni dominio dI coerente atomico $\mathcal{D}$ si può rappresentare come il dominio di clique di qualche spazio di tolleranza (cioè $\mathcal{D} \cong \mathrm{Clique}(\mathcal{T})$), e quest'ultimo può essere immerso nello spazio di tolleranza universale di Rado. Quindi, possiamo associare ad ogni dominio un insieme di interi positivi, che corrispondono ai punti dello spazio di tolleranza di Rado in cui gli elementi di $\mathcal{T}$ vengono mappati dall'immersione. Ora, se troviamo un'operazione fra insiemi di interi che "imiti" la costruzione che ci interessa (nel nostro caso: la somma coalescente), possiamo usarla per risolvere l'equazione di dominio.

Per vedere come questo possa funzionare, considerate la funzione $F : \wp(\omega) \times \wp_{\text{fin}}(\omega) \to \wp(\omega)$ definita come segue: se $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, e $0 \notin A$, definiamo

$$F(A, \{x_1, \ldots, x_n\}) = A \cup \{x'_1, \ldots, x'_n\},$$

dove, per ogni $k = 1, \ldots, n$, posto $I_k = \{i = 1, \ldots, k-1 :$ l'x_i-esimo bit di x_k è un $1\}$, si definisca

$$x'_k = (x_k - \sum_{i \in I_k} 2^{x_i}) 2^{\max A} + \sum_{i \in I_k} 2^{x'_i}.$$

Il punto qui è che questa funzione rappresenta la somma coalescente di due domini dI coerenti atomici, nel senso preciso che stiamo per spiegare. Per prima cosa, ci servono una definizione e due lemmi. Per due dati spazi di tolleranza $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, definiamo la loro unione disgiunta $\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1$ come lo spazio di tolleranza il cui supporto sia semplicemente l'unione disgiunta dei supporti X_0 e X_1, e in cui la tolleranza sia l'unione disgiunta delle due relazioni di tolleranza.

Si noti per prima cosa che

Lemma 4.4.5 *Siano $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ due spazi di tolleranza. Allora $Clique(\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1) \cong Clique(\mathcal{T}_0) \oplus Clique(\mathcal{T}_1)$.*

Dimostrazione: Una clique di $\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1$ non può contenere elementi che provengono dalle due diverse componenti (perché non sarebbero in relazione di tolleranza). Quindi, o è una clique di $\mathcal{T}_0$ oppure è una clique di $\mathcal{T}_1$, a meno che non sia la clique vuota. □

In effetti:

Lemma 4.4.6 *Sia $0 \notin A \subseteq \omega$ e $B \subseteq_{\text{fin}} \omega \setminus \{0\}$. Allora $\mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{F(A,B)} \cong \mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{A} + \mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{B}$.*

Dimostrazione: Sia $B = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_k\}$: dimostriamo l'enunciato per induzione su k. Se $k = 0$, allora $F(A, B) = A$ e non c'è niente da dimostrare. Supponiamo ora che $B = \{x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1}\}$ e poniamo $C = B \setminus \{x_{k+1}\}$. Per ipotesi induttiva, $\mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{F(A,C)} \cong \mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{A} + \mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{C}$. Ora

$$F(A, B) = F(A, C) \cup \{x = (x_{k+1} - \sum_{i \in I_{k+1}} 2^{x_i}) 2^{\max A} + \sum_{i \in I_{k+1}} x'_i\}.$$

L'elemento x non è connesso ad alcun elemento della A-componente, essendo $2^{\max A}$ strettamente maggiore di ogni elemento di A, e lo stesso vale per ogni x'_i; inoltre, x è connesso a x'_i nella C-componente se e solo se $i \in I_{k+1}$, cioè se e solo se x_{k+1} era connesso ad x_i.□

Quindi, riassumendo:

Teorema 4.4.2 *Sia $0 \notin A, B \subseteq \omega$, con B finito. Allora:*

$$Clique(\mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{F(A,B)}) \cong Clique(\mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{A}) \oplus Clique(\mathcal{T}_{\mathrm{R}}^{B}).$$

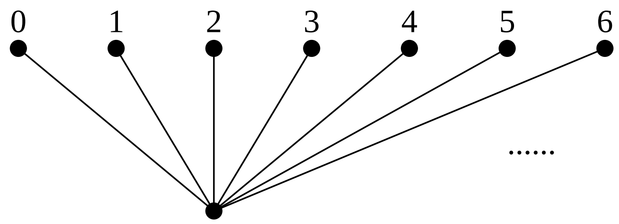


Figura 4.2: Il dominio piatto $\omega_\perp$ dei numeri naturali, che è la soluzione di $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \oplus \mathbb{I}$

Dimostrazione: È una conseguenza dei Lemmi 4.4.5 e 4.4.6. □

Si noti che, nel caso speciale che B sia un singoletto, la funzione F può essere definita come

$$F(A, \{x\}) = A \cup \{x \cdot 2^{\max A}\}.$$

Ora possiamo risolvere la nostra equazione di dominio usando la seguente semplice osservazione: lo spazio di Sierpinski si può rappresentare come $\mathbb{I} \cong \text{Clique}(\mathcal{T}_{\text{R}}^{\{1\}})$ (perché uno spazio di tolleranza di un punto ha esattamente due clique). Quindi, cercare la soluzione dell'equazione di dominio $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \oplus \mathbb{I}$ è equivalente a cercare un sottoinsieme A di ω tale che $\text{Clique}(\mathcal{T}_{\text{R}}^{A}) \cong \text{Clique}(\mathcal{T}_{\text{R}}^{A}) \oplus \mathbb{I}$ che, per il precedente teorema, è isomorfo a $\mathcal{T}_{\text{R}}^{F(A,\{1\})}$.

In altre parole, abbiamo ridotto il nostro problema a risolvere l'equazione ricorsiva $A = F(A, \{1\})$ sul dominio $\wp(\omega)$. Usando ora il teorema di punto fisso, otteniamo la seguente catena crescente:

$$\begin{array}{lcl} A_0 & = & \emptyset \\ A_1 & = & F(A_0, \{1\}) = \{1\} \\ A_2 & = & F(A_1, \{1\}) = \{1, 2^2\} \\ A_3 & = & F(A_2, \{1\}) = \{1, 2^2, 2^4\} \\ \ldots & & \\ A_k & = & \{2^i : i < k\}. \end{array}$$

Quindi A è l'insieme di tutte le potenze di due, e $\mathcal{T}_{\text{R}}^{A}$ è chiaramente lo spazio di tolleranza numerabile totalmente disconnesso (che è unico, a meno di isomorfismi). Infine, la soluzione $\mathcal{D} = \text{Clique}(\mathcal{T}_{\text{R}}^{A})$ è semplicemente il dominio piatto $\omega_\perp$ dei numeri naturali mostrato in Fig. 4.2 (perché le clique dello spazio di tolleranza numerabile totalmente disconnesso sono solo la clique vuota e tutti i singoletti).

4.5 Una costruzione universale alternativa

In questa sezione, forniremo una costruzione universale alternativa per la categoria dei domini dI coerenti, basata sui concetti di automa traccia e di linguaggio traccia. Questa costruzione è stata presentata in [BCS93], e richiede qualche prerequisito tecnico che andiamo ad introdurre.

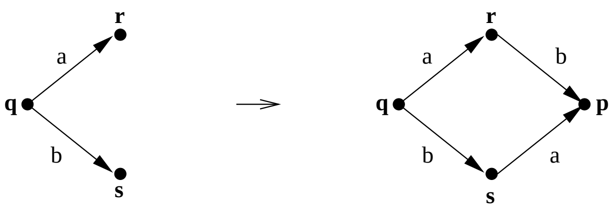


Figura 4.3: La condizione di commutatività

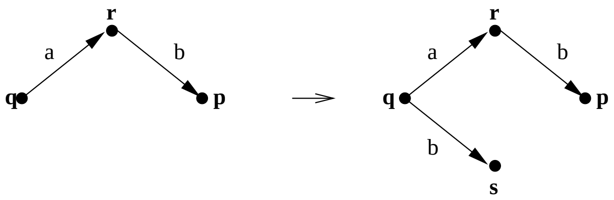


Figura 4.4: La condizione di pienezza

4.5.1 Automi traccia e sequenze di computazione

La nozione di automa concorrente che useremo è una particolare istanza degli *automi traccia* nel senso di Stark [Sta89b], sebbene non richiederemo l'esistenza di ϵ-transizioni. Le nostre macchine, gli automi traccia *pieni*, sono lievi varianti dei *sistemi di transizione asicroni* di Shields [Shi85] e Bednarczyk [Bed88]. Oltre all'interesse intrinseco di questo modello nel campo della teoria della concorrenza, osserveremo in seguito che c'è una corrispondenza esatta fra l'insieme di computazioni di tali automi e l'insieme di configurazioni di una struttura di eventi prima, che può essere estesa ad un isomorfismo degli ordini parziali quando si consideri l'ordine di prefisso fra le computazioni. Al fine di mantenere questa corrispondenza è necessario ammettere alfabeti ed insiemi di stati al più numerabili per gli automi. Inoltre, interpreteremo i simboli degli alfabeti come "eventi", anziché "azioni", perché questo tipo di ambiguità è irrilevante in questo contesto.

Un *automa traccia* è una struttura $\mathcal{A} = (E, \|_E, Q, T, *)$, dove E è un insieme al più numerabile di *eventi*, $\|_E$ è una relazione irriflessiva e simmetrica su E (la *relazione di concorrenza*), Q è un insieme di *stati* con $* \in Q$ (lo *stato iniziale*), e $T \subseteq (Q \times E \times Q)$ è un insieme di *transizioni*. Una transizione della forma $t = (q, a, r)$ si scriverà anche come $t : q \stackrel{a}{\to} r$, e per tale transizione porremo $\mathbf{dom}(t) = q$, $\mathbf{cod}(t) = r$ e $\mathbf{event}(t) = a$. Questi elementi devono soddisfare le seguenti condizioni:

Non ambiguità Se $q \stackrel{a}{\to} r, q \stackrel{a}{\to} r'$ allora $r = r'$;

Commutatività Se $q \stackrel{a}{\to} r, q \stackrel{b}{\to} s$ e $a \|_E b$, allora $\exists p \in Q.\, r \stackrel{b}{\to} p, s \stackrel{a}{\to} p$, come indicato nel diagramma di Fig. 4.3.

Un automa traccia è *pieno* se soddisfa:

Pienezza se $q \stackrel{a}{\to} r, r \stackrel{b}{\to} p$ e $a \|_E b$ allora $q \stackrel{b}{\to} s$ per qualche stato $s \in Q$, come nel diagramma di Fig. 4.4.

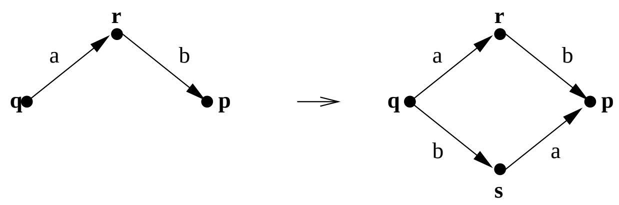


Figura 4.5: Una versione equivalente della condizione di pienezza

Si noti che lo stato s la cui esistenza è garantita dalla condizione di pienezza è unicamente determinato dalla non-ambiguità e, per commutatività, possiamo equivalentemente rappresentare la condizione come nel diagramma di Fig. 4.5.
La condizione di non-ambiguità corrisponde ad un'assunzione di determinismo, anche se gli automi non sono completamente specificati. Inoltre, non esiste alcuna nozione di stato finale, perciò l'accettazione in questo contesto è determinata dalla massimalità delle sequenze di computazione. Intuitivamente, la pienezza corrisponde a richiedere che le sequenze di computazione di un automa traccia rappresentino i possibili interlacciamenti di eventi nell'esecuzione di un processo concorrente.

Una *sequenza di computazione* (finita) di un automa[6] $\mathcal{A} = (E, \|_E, Q, T, *)$ è vuota oppure è una sequenza $\gamma = t_1 \dots t_n$ di transizioni di $\mathcal{A}$ tali che $\mathbf{dom}(t_{i+1}) = \mathbf{cod}(t_i)$ per $i = 1, \dots, n-1$. Definiamo $\mathbf{dom}(\gamma) = \mathbf{dom}(t_1)$ e $\mathbf{cod}(\gamma) = \mathbf{cod}(t_n)$, e la lunghezza di questa sequenza di computazione è $|\gamma| = n$. L'insieme delle sequenze di computazione finite di $\mathcal{A}$ che hanno $*$ come dominio è denotata da $\mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})$. Abbiamo anche sequenze di computazione infinite di $\mathcal{A}$, della forma $\gamma = t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots$, e l'insieme delle sequenze di computazione finite ed infinite di $\mathcal{A}$ il cui dominio sia lo stato iniziale sarà indicato con $\mathbf{CS}(\mathcal{A})$. Due sequenze di computazione γ, δ sono componibili se $\mathbf{cod}(\gamma) = \mathbf{dom}(\delta)$, e la loro composizione è la sequenza di computazione $\gamma\delta$. Diremo che γ è un prefisso di δ, e scriveremo $\gamma \leq \delta$, quando esiste una sequenza di computazione ξ tale che $\gamma\xi = \delta$.

Si noti che la condizione di non-ambiguità determina una corrispondenza biiettiva fra le sequenze di computazione e le parole finite o infinite ottenute concatenando i simboli che etichettano le loro transizioni. Utilizzeremo questo fatto e spesso rappresenteremo le sequenze di computazione con le corrispondenti parole.

Per una miglior descrizione dell'ordine parziale degli eventi in un ambiente distribuito, è possibile identificare le sequenze a meno di permutazioni di simboli adiacenti che rappresentano azioni concorrenti. Cioè, possiamo considerare tracce come descrizioni di computazioni concorrenti, ed in effetti gli automi traccia possono essere visti come riconoscitori per una classe speciale di linguaggi traccia (nel senso di Mazurkiewicz [Maz77]; si veda anche [DR95] per una rassegna su questo argomento).

Un *alfabeto concorrente* è una coppia $\mathfrak{A} = (A, \|_A)$, dove A sia un insieme al più numerabile e $\|_A$ sia una relazione irriflessiva e simmetrica su A. Il *monoide traccia* $\Theta(\mathfrak{A})$ è il quoziente di A^* rispetto alla minima congruenza $\sim_A$ contenente tutte le coppie (ab, ba) con $a\|_A b$. Un elemento di $\Theta(\mathfrak{A})$ è detto *traccia*. Un sottoinsieme di $\Theta(\mathfrak{A})$ è chiamato *linguaggio traccia*.

[6]In questa sezione, la parola "automa" sarà sempre usata per indicare un "automa traccia".

Con Alph($[w]$), per una data traccia $[w]$ su $\mathfrak{A}$, indichiamo l'insieme dei simboli che compaiono in uno qualunque dei suoi rappresentanti $w \in A^*$. L'insieme delle tracce si può parzialmente ordinare per prefisso: per $s, t \in \Theta(\mathfrak{A})$, si ponga:

$$s \leq_{\mathfrak{A}} t \text{ se e solo se } \exists u \in \Theta(\mathfrak{A}).\, su = t.$$

Ovviamente $[\epsilon]$, dove ϵ indica la parola vuota, è il minimo elemento dell'insieme parzialmente ordinato $\Theta(\mathfrak{A})$.

Associamo in modo naturale ad ogni sequenza di computazione $\gamma = t_1 \ldots t_n$ la traccia $\mathrm{tr}(\gamma) = [\mathbf{event}(t_1) \ldots \mathbf{event}(t_n)]$. Questa funzione induce una relazione di equivalenza fra sequenze di computazione, che coincide con la "equivalenza per permutazione" definita da Stark [Sta89b], ed anche una nozione di prefisso.

Date $\gamma, \delta \in \mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})$, sia $\gamma \sim \delta$ ogni volta che $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\delta)$, ed in tal caso diremo che le due sequenze γ, δ sono *equivalenti a meno di permutazioni.* La relazione $\precsim$ su $\mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})$ (*prefisso a meno di permutazioni*) è la chiusura transitiva di $\leq \cup \sim$, e l'insieme parzialmente ordinato $D^\circ(\mathcal{A})$ è definito come $\mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})/\sim$, ordinato mediante $\precsim$.

Si osservi che, se $\mathcal{A}$ è un automa pieno, la funzione

$$\mathrm{word} : \mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A}) \rightarrow \bigcup\{\mathrm{tr}(\gamma), \gamma \in \mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})\},$$

definita ponendo

$$\gamma = t_1 \ldots t_n \longmapsto \mathbf{event}(t_1) \ldots \mathbf{event}(t_n)$$

è biiettiva. In altre parole, ogni rappresentante della traccia di una sequenza di computazione finita γ è la parola associata a qualche sequenza di computazione $\delta \in \mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A})$, dove $\gamma \sim \delta$.

4.5.2 Strutture di eventi prime e domini dI coerenti

I domini dI coerenti, introdotti nel Capitolo 3, compaiono anche come domini di configurazioni di strutture di eventi prime con conflitto binario (si veda [Win91]).

Una *struttura di eventi prima* [Win80] è una tripla $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$, dove E è un insieme al più numerabile (di "eventi"), $\leq$ è un ordine parziale sugli eventi (la "relazione di causalità") e $\#$ è una relazione binaria irriflessiva e simmetrica sugli eventi (la relazione di "conflitto") che soddisfa:

- per ogni $e \in E$, l'insieme $\downarrow e = \{e', e' \leq e\}$ è finito;
- se $e\#e'$ e $e' \leq e''$, allora $e\#e''$.

Si noti che questa è un'istanza particolare della definizione di struttura di eventi, dove il conflitto sia specificato mediante una relazione binaria, e l'abilitazione sia data mediante un ordine parziale.

Se $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ è una struttura di eventi prima, possiamo associarle il poset $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ che consiste delle sue *configurazioni* (ordinate per inclusione). Questi sono i sottoinsiemi x di E tali che

- per $e, e' \in x$, $\neg(e\#e')$;

- se $e \in x$ e $e' \leq e$ allora $e' \in x$.

Più precisamente, abbiamo il seguente teorema di rappresentazione, che combina i risultati di Nielsen, Plotkin e Winskel [NPW81] e di Winskel [Win87] (si veda anche [BB95] per un altro teorema di rappresentazione in termini di speciali alberi con etichettatura causale):

Teorema 4.5.1 *Per ogni struttura di eventi prima $\mathcal{E}$, il poset $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ è un dominio dI coerente. Inoltre, ogni dominio dI coerente $\mathcal{D}$ è isomorfo al dominio di configurazioni di una struttura di eventi prima $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = (E_D, \leq, \#)$.* □

Si osservi che un evento $e \in E$ di una struttura di eventi prima $\mathcal{E}$ può essere mappata sulla configurazione $\downarrow e = \{e' \in E, e' \leq e\}$, e che le configurazioni di questa forma si possono caratterizzare come i primi completi di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Per un dominio dI coerente arbitrario $\mathcal{D}$ definiamo la struttura di eventi prima $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = (E_D, \leq, \#)$ prendendo E_D come l'insieme $\Pr(D)$ dei primi completi di $\mathcal{D}$, $\leq$ come la restrizione dell'ordinamento su $\mathcal{D}$ a $\Pr(D)$ e ponendo $e\#e'$ se e solo se $\neg(e \uparrow e')$. Allora $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ soddisfa $\mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))) \cong \mathcal{D}$.

4.5.3 Automi traccia pieni e domini dI coerenti

C'è una teoria di rappresentazione ben nota che mette in relazione categorie di domini con altre strutture di natura "sintattica"; alcuni esempi sono stati presentati nelle prime sezioni di questo Capitolo. Ulteriori esempi di questa teoria sono l'equivalenza dei domini con gli *information systems* (Scott [Sco82]), dei domini concreti con le *information matrices* di Kahn e Plotkin [KP78] (chiamate anche *strutture di dati concrete* in Curien [Cur86]), e la rappresentazione già menzionata dei domini dI coerenti come famiglie di configurazioni di strutture di eventi prime.

In questa sezione esaminiamo le connessioni fra classi di domini distributivi e automi concorrenti, fornendo risultati di rappresentazione alternativi per questi domini. Questa direzione di ricerca, iniziata da Shields [Shi82], Bednarczyk [Bed88], Stark [Sta89a] (i cui automi traccia corrispondono esattamente ad un tipo più generale di strutture di eventi presentate in [Win87]), è stata in seguito sviluppata in [Dro90].

I due maggiori esempi di dominio dI per lo scopo di questa sezione sono il dominio di tutte le tracce (finite ed infinite) su un alfabeto concorrente $\mathfrak{A}$ ordinate per prefisso, ed il dominio delle computazioni (finite ed infinite) di un automa traccia pieno. Risulta che ogni dominio dI coerente si può rappresentare come il dominio di computazioni di un automa di questo tipo, il che ci dà un teorema di rappresentazione alternativo per questa classe di domini. Per una dimostrazione diversa di questo risultato si veda [Win91], dove viene attribuita a Bednarczyk [Bed88]. L'uso sistematico delle proprietà delle coppie immersione-proiezione nelle nostre dimostrazioni si rivelerà utile per provare l'universalità del dominio dI coerente costruito nella prossima sottosezione.

Sia $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ una struttura di eventi prima. Le configurazioni finite di $\mathcal{E}$ formano un insieme $\mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$ le cui proprietà saranno usate nella costruzione di un automa traccia pieno $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ da (la struttura $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ associata a) un dominio dI coerente $\mathcal{D}$. In effetti, data una struttura di eventi prima $\mathcal{E}$, si definisca un automa

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = (E, \|_E, Q_E, T_E, *_E)$$

che ha come eventi semplicemente gli eventi di $\mathcal{E}$ con relazione di concorrenza determinata da

$$e \|_E e' \text{ se e solo se } \neg(e \leq e') \wedge \neg(e' \leq e) \wedge \neg(e \# e').$$

Gli stati di $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ sono gli elementi di $\mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$, con $*_E = \emptyset$, e $x \stackrel{e}{\rightarrow} y$ se e solo se $y = x \cup \{e\}$ e $e \notin x$.

Nel seguito, usiamo $\lessdot$ per indicare la relazione di copertura associata ad un ordine parziale. Una *catena di copertura* da x ad y è una catena $x = x_0 \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot \ldots \lessdot x_n = y$.

Lemma 4.5.1 *Date $x, y \in \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$ con $x \subseteq y$, esiste una catena di copertura da x ad y.*

Dimostrazione: Si osservi innanzitutto che, per $x, y \in \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$, $x \lessdot y$ se e solo se $y = x \cup \{e\}$ per qualche $e \notin x$. La dimostrazione è per induzione sulla cardinalità di $y \setminus x$. La base è ovvia, quindi si ponga $y = x \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$. Esiste un $e_i \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ che è minimale rispetto all'ordine su E, quindi $x \cup \{e_i\} \in \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$. Allora $|y \setminus (x \cup \{e_i\})| < |y \setminus x|$, e la conclusione si ottiene applicando l'ipotesi induttiva a $x \cup \{e_i\} \subseteq y$. □

Il seguente Lemma dice che la proprietà di Jordan-Dedekind vale per l'insieme parzialmente ordinato delle configurazioni finite di una struttura di eventi prima $\mathcal{E}$. La sua dimostrazione segue dall'osservazione che la lunghezza di ogni catena di copertura da x ad y è completamente determinata dalla cardinalità della differenza $y \setminus x$.

Lemma 4.5.2 *Nell'ordine parziale $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ tutte le catene di copertura fra due elementi hanno la stessa lunghezza.* □

Dati $x \in \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$ e una catena di copertura C della forma

$$x = x_0 \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot \ldots \lessdot x_{n-1} \lessdot x_n = y$$

da x a y, si definisca $\mathrm{word}(C) \in E^*$ come la sequenza di eventi $e_1 \ldots e_n$, dove $x_i = x_{i-1} \cup \{e_i\}$ per $i = 1, \ldots, n$. Si noti che la coppia $(E, \|_E)$ è un alfabeto concorrente, così la relazione di concorrenza $\|_E$ induce una relazione di equivalenza $\sim_E \subseteq E^* \times E^*$.

Lemma 4.5.3 *Per $x, y \in \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$ e per ogni coppia di catene di copertura $C = x \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot \ldots \lessdot x_{n-1} \lessdot x_n = y$, $C' = x \lessdot x'_1 \lessdot x'_2 \lessdot \ldots \lessdot x'_{n-1} \lessdot x'_n = y$ da x a y,*

$$\mathrm{word}(C) \sim_E \mathrm{word}(C').$$

Dimostrazione: Per il Lemma 4.5.2, C e C' hanno la stessa lunghezza n, e la dimostrazione è per induzione su n. Si assuma che le catene non siano vuote (altrimenti, la proprietà è banalmente verificata), e sia $i+1$ il primo indice in cui le due catene differiscono. Allora $x_{i+1} = x_i \cup \{e_{i+1}\}$ e $x'_{i+1} = x_i \cup \{e'_{i+1}\}$, dove $e_{i+1} \|_E e'_{i+1}$. Quindi $x_i \cup \{e_{i+1}, e'_{i+1}\}$ è ancora una configurazione e, per il Lemma 4.5.1, esiste una catena C'' da $x_i \cup \{e_{i+1}, e'_{i+1}\}$ a y. Per ipotesi induttiva si ha che

$$e'_{i+1}\mathrm{word}(C'') \sim_E \mathrm{word}(x_{i+1} \lessdot \ldots \lessdot x_n)$$

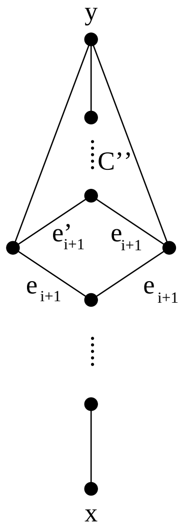


Figura 4.6: Illustrazione della dimostrazione del Lemma 4.5.3

e

$$e_{i+1}\text{word}(C'') \sim_E \text{word}(x'_{i+1} \lessdot \ldots \lessdot x'_n).$$

Ora $e_{i+1}e'_{i+1}\text{word}(C'') \sim_E e'_{i+1}e_{i+1}\text{word}(C'')$, quindi

$$\text{word}(x_i \lessdot x_{i+1} \lessdot x_{i+2} \lessdot \ldots \lessdot x_{n-1} \lessdot x_n = y)$$

è $\sim_E$-equivalente a

$$\text{word}(x_i \lessdot x'_{i+1} \lessdot x'_{i+2} \lessdot \ldots \lessdot x'_{n-1} \lessdot x'_n = y)$$

ed infine anche le due parole

$$\text{word}(x = x_1 \lessdot x_2 \lessdot x_3 \lessdot \ldots \lessdot x_i \lessdot x_{i+1} \lessdot \ldots \lessdot x_{n-1} \lessdot x_n = y)$$

e

$$\text{word}(x = x_1 \lessdot x_2 \lessdot x_3 \lessdot \ldots \lessdot x_i \lessdot x'_{i+1} \lessdot \ldots \lessdot x'_{n-1} \lessdot x'_n = y)$$

sono $\sim_E$-equivalenti. $\square$

La dimostrazione è illustrata nella Fig. 4.6.

Proposizione 4.5.1 *L'automa $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ è pieno.*

Dimostrazione: La condizione di non-ambiguità su $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ è immediata. Si assuma ora che $x \xrightarrow{e} y$ e $x \xrightarrow{e'} y'$ e che $e \|_E e'$. Allora $z = x \cup \{e, e'\} \in Q_E$ perché questo insieme è ancora una configurazione finita di $\mathcal{E}$, quindi si ha $y \xrightarrow{e'} z$ e $y' \xrightarrow{e} z$. Infine, sia $x \xrightarrow{e} y$ e $y \xrightarrow{e'} z$, dove $e \|_E e'$. Questo implica che $x \cup \{e'\}$ è ancora una configurazione finita di $\mathcal{E}$: infatti, è consistente (essendo sottoinsieme di una configurazione), e chiuso verso il basso (essendo e ed e' inconfrontabili), quindi $x \xrightarrow{e'} x \cup \{e'\}$. $\square$

Possiamo ora definire una funzione $\Re$ che mappa una classe di $\sim_E$-equivalenza di una sequenza di computazione γ di $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ nella configurazione finita $\mathbf{cod}(\gamma)$ di $\mathcal{E}$.

Teorema 4.5.2 *La funzione*

$$\Re : D^\circ(\mathcal{A}(\mathcal{E})) \to \mathcal{L}^\circ(\mathcal{E})$$

è un isomorfismo d'ordine.

Dimostrazione: Se γ è una sequenza di computazione finita di $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, allora la sua classe di $\sim_E$-equivalenza è esattamente l'insieme delle catene di copertura da $\emptyset$ a $\mathbf{cod}(\gamma)$: questo implica la suriettività per il Lemma 4.5.1 ed anche, per il Lemma 4.5.3, che ogni due classi di equivalenza di sequenze di computazione aventi lo stesso codominio siano uguali, mostrando così l'iniettività di $\Re$. Infine, è banale verificare che $\Re$ e la sua inversa sono entrambe monotone. $\square$

Nel seguito, indicheremo con $\overline{\mathfrak{A}}$ il dominio $\mathrm{Idl}(\Theta(\mathfrak{A}), \leq)$.

Lemma 4.5.4 *Per ogni automa traccia pieno $\mathcal{A}$ sull'alfabeto concorrente $\mathfrak{E}$, esiste un'immersione stabile del dominio $D(\mathcal{A})$ in $\overline{\mathfrak{E}}$, dove $D(\mathcal{A})$ è il completamento per ideali di $D^\circ(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione: La funzione $\mathrm{tr} : \mathbf{CS}^\circ(\mathcal{A}) \to \Theta(\mathfrak{E})$ si può estendere ad una funzione $D^\circ(\mathcal{A}) \to \Theta(\mathfrak{E})$. Stark ha dimostrato in [Sta89b], Theorem 4, che questa funzione, estesa per continuità a $D(\mathcal{A})$ e $\overline{\mathfrak{E}}$, è un'iniezione additiva che soddisfa la prima condizione del Lemma 3.3.2. Essa soddisfa anche la seconda condizione in conseguenza della pienezza di $\mathcal{A}$, da cui segue il risultato. $\square$

Il seguente risultato è ben noto: si possono trovare alcune dimostrazioni, per esempio in [RT91] e [Win91].

Teorema 4.5.3 *Per ogni alfabeto concorrente $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ è un dominio dI coerente.* $\square$

Infine, possiamo enunciare il nostro risultato di rappresentazione per i domini dI coerenti:

Teorema 4.5.4

1. *Se $\mathcal{A}$ è un automa traccia pieno, allora $D(\mathcal{A})$ è un dominio dI coerente.*
2. *Per ogni dominio dI coerente $\mathcal{D}$ esiste un alfabeto concorrente $\mathfrak{E} = (E_D, \|_{E(D)})$ ed un automa traccia pieno $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = (E_D, \|_{E(D)}, Q_{E(D)}, T_{E(D)}, *_{E(D)})$ tale che il dominio $D(\mathcal{A}(\mathcal{D}))$ sia isomorfo a $\mathcal{D}$.*

Dimostrazione: Parte (1). Segue dal Teorema 4.5.3 usando il Lemma 4.5.4 e la Proposizione 3.3.2.
Parte (2). Si prenda $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ come l'automa pieno $\mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))$. Allora, usando i Teoremi 4.5.2 e 4.5.1, si ha che $D(\mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))) \cong \mathcal{L}(\mathcal{E}(D)) \cong \mathcal{D}$. $\square$

4.5.4 Costruzione di un dominio dI coerente universale

La rappresentazione di domini dI coerenti in termini di sequenze di computazione di opportuni automi traccia si può usare per costruire un dominio dI coerente universale, usando ancora una volta lo spazio di tolleranza universale di Rado $\mathcal{T}_{\mathrm{R}}$, stavolta interpretandolo come un alfabeto concorrente.

Il seguente risultato classico di teoria delle tracce è utile per studiare il poset $\Theta(\mathfrak{A})$ di tracce su un alfabeto concorrente $\mathfrak{A}$:

Lemma 4.5.5 (Lemma di Levi per le tracce; si veda [DR95]) *Se $\mathfrak{A} = (A, \|_A)$ è un alfabeto concorrente e $ss' = tt'$ per $s, s', t, t' \in \Theta(\mathfrak{A})$, allora ci sono $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \Theta(\mathfrak{A})$ tali che $s = u_1u_2, t = u_1u_3, s' = u_3u_4, t' = u_2u_4$, e $\mathrm{Alph}(u_2) \times \mathrm{Alph}(u_3) \subseteq \|_A$.* □

La seguente proposizione dà l'esatta relazione fra le immersioni di alfabeti concorrenti (visti come spazi di tolleranza) e gli ideali forti del dominio di tracce associato.

Proposizione 4.5.2 *Si assuma che $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sia un'immersione di alfabeti concorrenti (visti come spazi di tolleranza) $\mathfrak{A} = (A, \|_A)$, $\mathfrak{B} = (B, \|_B)$. Allora f, estesa alle tracce, dà un isomorfismo d'ordine fra $\Theta(\mathfrak{A})$ ed un sottoinsieme M di $\Theta(\mathfrak{B})$, e:*

1. *Se $s \leq_{\mathfrak{B}} t$ e $t \in M$, allora anche $s \in M$;*
2. *Se $s, t \in M$ e $s \uparrow t$, allora $s \sqcup t$ esiste ed è un elemento di M.*

Dimostrazione: Se f si estende nel modo canonico ad una funzione su $A^* \to B^*$, allora, per la definizione stessa di immersione di spazi di tolleranza, vale che, per ogni $v, w \in A^*$, $v \sim_A w$ se e solo se $f(v) \sim_A f(w)$. Quindi, f induce una biiezione fra $\Theta(\mathfrak{A})$ ed un sottoinsieme M di $\Theta(\mathfrak{B})$, che rispetta l'ordine di prefisso. Nel resto della dimostrazione, ometteremo di considerare l'isomorfismo ed assumeremo semplicemente che $A \subseteq B$ e $\|_A = \|_B \cap A^2$ (quindi $M = \Theta(\mathfrak{A}) \subseteq \Theta(\mathfrak{B})$.

Per la prima parte dell'enunciato, se $s = [u]_{\mathfrak{B}}$ e $t = [uv]_{\mathfrak{A}}$, allora $u \in A^*$ e $s = [u]_{\mathfrak{A}}$, e quindi $s \in \Theta(\mathfrak{A})$. Per la seconda parte, se $s \uparrow t$, allora esistono s', t' tali che $ss' = tt'$. Per il Lemma 4.5.5 ci sono u_1, u_2, u_3, u_4 tali che $s = u_1u_2$, $s' = u_3u_4$, $t = u_1u_3$ e $t' = u_2u_4$ con $\mathrm{Alph}(u_2) \times \mathrm{Alph}(u_3) \subseteq \|_A$. Quindi $u = u_1u_2u_3 = u_1u_3u_2 \in \Theta(\mathfrak{A})$. Naturalmente $s, t \leq_{\mathfrak{A}} u$; si assuma che per qualche s'', t'' si abbia $ss'' = tt''$: allora $u_1u_2s'' = u_1u_3t''$ e quindi, per la proprietà di cancellazione dei monoidi liberi parzialmente commutativi $\Theta(\mathfrak{A})$ (si veda, per esempio, Diekert [Die90]), $u_2s'' = u_3t''$. Mediante un'altra applicazione del Lemma 4.5.5 si ottiene una decomposizione $u_2 = \alpha\beta$, $s'' = \gamma\delta$, $u_3 = \alpha\gamma$ e $t'' = \beta\delta$, e ciascun simbolo che compare in β è concorrente con tutti i simboli di γ. Questo implica che $\alpha = [\epsilon]$, e quindi $u_2 = \beta$, $u_3 = \gamma$, e $s'' = u_3\delta$, $t'' = u_2\delta$. Infine, concludiamo che $u \leq_{\mathfrak{A}} ss''$, e perciò $u = s \sqcup t$. □

Otteniamo dunque, come conseguenza della Proposizione 4.5.2, il seguente Corollario:

Corollario 4.5.1 *Se $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sono alfabeti concorrenti ed esiste un'immersione di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, allora c'è una coppia immersione-proiezione stabile da $\overline{\mathfrak{A}}$ a $\overline{\mathfrak{B}}$.*

Dimostrazione: Alla luce della Proposizione 3.3.2, usando la Proposizione 4.5.2, si ottiene che $\mathrm{Idl}(\Theta(\mathfrak{A}))$ è (isomorfo a) un ideale forte di $\mathrm{Idl}(\Theta(\mathfrak{B}))$. Per definizione di $\overline{\mathfrak{A}}$ e $\overline{\mathfrak{B}}$, usando la seconda parte della Proposizione 3.3.1, si ottiene il risultato. □

Possiamo infine enunciare il risultato principale di questa sezione:

Teorema 4.5.5 *Il dominio $\overline{\mathcal{T}_{\mathrm{R}}}$ è un dominio universale nella categoria dei domini dI coerenti (al più numerabili) con coppie immersione-proiezione stabili come morfismi.*

Dimostrazione: Dato un qualsiasi dominio dI coerente al più numerabile $\mathcal{D}$ usiamo il Teorema 4.5.4 per costruire l'automa pieno $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ sull'alfabeto concorrente $\mathfrak{E} = (E_D, \|_{E(D)})$. Il suo dominio di computazioni $D(\mathcal{A}(\mathcal{D})) \cong \mathcal{D}$ si può immergere stabilmente, per il Lemma 4.5.4, nel dominio $\overline{\mathfrak{E}}$, che a sua volta può essere rigidamente immerso in $\overline{\mathcal{T}_{\mathrm{R}}}$ mediante il Teorema 4.3.1, Corollario 4.5.1. □

Una domanda importante la cui risposta non è nota allo stato attuale è se il dominio $\overline{\mathcal{T}_{\mathrm{R}}}$ sia isomorfo al dominio dI coerente universale la cui esistenza è dimostrata in [Dro91]. In particolare, sarebbe interessante sapere se $\overline{\mathcal{T}_{\mathrm{R}}}$ sia omogeneo, perché in tal caso l'isomorfismo si potrebbe stabilire come conseguenza dell'unicità del dominio universale omogeneo data dal Teorema 4.2.1.

4.6 Una nota sulle costruzioni probabilistiche

In questa sezione, discuteremo in dettaglio una tecnica probabilistica che può essere usata come modo alternativo per dimostrare l'esistenza di rappresentazioni universali omogenee; in particolare, il nostro punto di partenza sarà il risultato di Erdős e Rényi [ER63] (discusso in profondità da Cameron [Cam90]; si veda anche [ES74]), che presentano essenzialmente una dimostrazione probabilistica di esistenza per il grafo universale di Rado. Dimostreremo come questo si possa estendere a spazi di tolleranza generalizzati e MeES. In questa sezione, saremo un po' vaghi nella notazione, e la maggior parte delle dimostrazioni saranno solo accennate, poiché una discussione dettagliata di questioni probabilistiche va oltre lo scopo di questa tesi.

4.6.1 Costruzione probabilistica del grafo di Rado

Presenteremo per prima cosa la dimostrazione di universalità data da Erdős e Rényi per la categoria **TolSp**. Sia $\mathcal{G}$ l'insieme dei grafi non orientati[7] con insieme dei nodi ω. Sia $\mathbb{A}$ la minima famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{G}$ che soddisfi i seguenti vincoli:

1. per ogni arco e, l'insieme $\mathcal{G}_e = \{G : e \text{ è un arco di } G\}$ è un elemento di $\mathbb{A}$;
2. $\mathcal{G}$ è esso stesso un elemento di $\mathbb{A}$;
3. se $S \in \mathbb{A}$, allora anche $\mathcal{G} \setminus S \in \mathbb{A}$;

[7] In questo caso, è in qualche modo più facile pensare ad uno spazio di tolleranza come ad un grafo non orientato, ed usare la terminologia standard di teoria dei grafi. Un elemento dello spazio di tolleranza sarà perciò chiamato "vertice", ed un "arco" sarà una coppia non ordinata di vertici (cioè un insieme di vertici di cardinalità 2).

4. se $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{A}$, allora $\cup\mathbb{S} \in \mathbb{A}$.

In pratica, $\mathbb{A}$ è la σ-algebra su $\mathcal{G}$ generata dall'insieme di grafi contenenti un arco fissato (cfr. Appendice A.2).
Definiamo quindi una misura (di probabilità) μ per $\mathbb{A}$, ponendo:

- per ogni arco e, $\mu(\mathcal{G}_e) = \mu(\{G : e \text{ è un arco di } G\}) = \frac{1}{2}$;
- i due eventi $\mathcal{G}_e$ e $\mathcal{G}_{e'}$ sono indipendenti, ogni volta che e ed e' sono diversi.

Ora, μ è una misura di probabilità standard (cioè, normalizzata), che corrisponde alla costruzione di un grafo casuale su ω dove, per ogni coppia di vertici, c'è esattamente una probabilità $\frac{1}{2}$ che essi siano collegati da un arco.

In alternativa [Cam90], questo si può riformulare come segue: si consideri una enumerazione fissata degli archi (cioè, un'enumerazione $e_0, e_1, e_2, \ldots$ dell'insieme $\{e \subseteq \omega : |e| = 2\}$). Allora, c'è una corrispondenza biiettiva fra $\mathcal{G}$ e l'insieme delle ω-sequenze binarie; possiamo quindi considerare $\{0,1\}^\omega$ come spazio di probabilità, assumendo che l'evento (insieme di sequenze) che hanno un "1" in una posizione predeterminata abbia probabilità $\frac{1}{2}$.

In modo più concreto (anche se un po' impreciso), possiamo pensare ad un gioco basato sul lancio di una moneta: per ogni coppia di vertici, lanciamo una moneta (non truccata[8]) per decidere se mettere un arco fra quei due vertici oppure no.

Ora, la dimostrazione procede come segue. Siano $A, B \subseteq_{\text{fin}} \omega$ due insiemi finiti disgiunti di vertici (non entrambi vuoti), e si consideri il seguente evento[9]:

$$E(A,B) = \text{“esiste un vertice } x \text{ in } G \text{ che è adiacente ad ogni vertice di } A \text{ e a nessun vertice di } B\text{”}.$$

Ora, sia $x_0, x_1, \ldots$ un'enumerazione degli elementi di $\omega \setminus (A \cup B)$, e si consideri, per ogni $n = 0, 1, \ldots$, l'evento:

$$F^n(A,B) = \text{“nessuno dei vertici } x_0, \ldots, x_n \text{ soddisfa la proprietà di essere adiacente ad ogni vertice di } A \text{ e a nessun vertice di } B\text{”}.$$

Chiaramente, $E(A,B)$ è il complemento dell'insieme $\cap_{n\in\omega} F^n(A,B)$, quindi (per la Proposizione A.2.1 (6)) $\mu(E(A,B)) = 1 - \mu(\cap_{n\in\omega} F^n(A,B))$. Si osservi che la sequenza $F^n(A,B)$ soddisfa la proprietà antimonotona, cioè $F^{n+1}(A,B) \subseteq F^n(A,B)$ e quindi, per la Proposizione A.2.1 (5),

$$\mu(\cap_{n\in\omega} F^n(A,B)) = \lim_{n\to\infty} \mu(F^n_G(A,B)).$$

Ma ora, per ogni x, la probabilità che x non sia adiacente a qualche vertice di A, o adiacente a qualche vertice di B, è uno meno la probabilità che esso sia adiacente a tutti i vertici di A e non-adiacente ad alcun vertice di B, cioè $1 - 2^{-m}$ dove $m = |A| + |B|$. Poiché questa probabilità è indipendente per tutti gli x, si ha che

$$\mu(F^n(A,B)) = (1 - \frac{1}{2^m})^n$$

[8] In realtà, come vedremo, il fatto che la moneta sia non truccata non è un requisito stringente per la costruzione.

[9] Identifichiamo un evento con l'insieme dei grafi $G \in \mathcal{G}$ che soddisfano l'enunciato.

e quindi

$$\mu(\cap_{n\in\omega}F^n(A,B)) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^m})^n = 0$$

che infine significa $\mu(E(A,B)) = 1$.

Quindi $\mathbf{Prob}(E(A,B)) = \mu(E(A,B)) = 1$. Ora, siamo interessati alla misura di probabilità dell'insieme dei grafi che soddisfano la proprietà di saturazione, cioè

$$\mathbf{Prob}(\cap_{A,B}E(A,B)) = \mu(\cap_{A,B}E(A,B))$$

che è $1-\mu(\cup_{A,B}E(A,B)^C)$. Ma $\cup_{A,B}E(A,B)^C$ è un'unione numerabile al più (perché ci sono al più una quantità numerabile di coppie di sottoinsiemi finiti di ω) di insiemi, ciascuno dei quali ha misura $\mu(E(A,B)^C) = 1-\mu(E(A,B)) = 0$. Quindi, per la Proposizione A.2.1 (7), anch'esso avrà misura zero, e perciò la misura dell'insieme di tutti i grafi universali omogenei è $1-\mu(\cup_{A,B}E(A,B)^C) = 1-0 = 1$.

In altre parole, il grafo casuale soddisfa la proprietà di saturazione incrementale del Teorema 4.2.2 con probabilità 1. Quindi, per la proprietà di unicità garantita dal Teorema 4.2.1 (usando la Proprietà 4.3.1), il grafo casuale è $\mathcal{T}_{\mathrm{R}}$ con probabilità 1.

Come Cameron osserva ([Cam90], Exercise 4.3.1), l'intera prova non dipende veramente dall'assunzione di fairness nel lancio della moneta. Potremmo eguagliare la probabilità di ciascun arco ad un qualunque p fissato nell'intervallo $(0,1)$, ed otterremmo lo stesso risultato. In altre parole, la costruzione del grafo di Rado è molto robusta, e dipende solo dall'importante assunzione che le scelte fatte per ogni arco siano indipendenti: questa è, in effetti, la chiave di volta dell'intera costruzione, perché dà un sufficiente grado di libertà per assicurare che valga la proprietà universale.

4.6.2 Costruzione probabilistica del gts universale

Siamo ora pronti per generalizzare la costruzione dello spazio di tolleranza di Rado al caso dei gts; anche se sarebbe possibile sviluppare un "meccanismo" analogo a quello presentato nel paragrafo precedente, ometteremo i dettagli ed andremo al cuore della dimostrazione senza indulgere in tutte le questioni tecniche coinvolte.

Vogliamo costruire un gts casuale $\mathcal{T}_{RAND}$, più o meno nello stesso modo in cui abbiamo costruito un grafo casuale; prendiamo ω come insieme soggiacente. Ora dobbiamo costruire il predicato di consistenza Con_{RAND}. Per fare questo, consideriamo una enumerazione fissata $A_0, A_1, A_2, \ldots$ dei sottoinsiemi finiti di ω che soddisfi i seguenti vincoli:

1. l'enumerazione è iniettiva; cioè $A_i \neq A_j$ ogni volta che $i \neq j$;

2. se $B \subset A_i$, allora esiste un $j < i$ tale che $B = A_j$.

Tale enumerazione può essere costruita passo dopo passo dalla seguente procedura ricorsiva:

- **Primo passo.** Poniamo $A_0 = \emptyset$ e $S = \omega$;

- **Passo induttivo.** Si supponga di aver già costruito la sottosequenza $A_0, \ldots, A_k$, e sia $n = \min S$. Allora, per ogni $i = 0, \ldots, k$, si definisca $A_{k+i+1} = A_i \cup \{n\}$; inoltre, si cancelli n dall'insieme S.

Questa procedura produce la sequenza $\emptyset$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{2\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$ etc.

Ora, per ogni $i \in \omega$, si decida se $A_i \in \mathrm{Con}_{RAND}$ usando il seguente algoritmo randomizzato:

1. se $|A_i| \leq 1$, allora si metta A_i nel predicato di consistenza (con probabilità 1):

2. altrimenti, si considerino tutti gli indici $j < i$ tali che $A_j \subset A_i$: se c'è un indice per cui $A_j \notin \mathrm{Con}_{RAND}$, allora non si metta A_i nel predicato di consistenza; altrimenti, si decida se metterlo oppure no con probabilità $\frac{1}{2}$.

La procedura è definita in modo tale che la struttura risultante è necessariamente un gts, perché Con_{RAND} è chiaramente chiuso verso il basso e contiene tutti i singoletti.

Ora, dobbiamo dimostrare che la saturazione vale con probabilità 1. Si supponga di avere un sotto-gts finito di $\mathcal{T}_{RAND}$, con insieme soggiacente $Y \subseteq_{\text{fin}} \omega$. Allora, ci sarà un certo insieme (finito) di indici $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k$ tali che $\{A_{\alpha_i}, i = 0, \ldots, k\} = \wp(Y)$ (e più precisamente $k = 2^{|Y|} - 1$), alcuni dei quali corrispondono ad insiemi consistenti. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme dei sottoinsiemi di Y che stanno nel predicato di consistenza Con_{RAND} (e sia $M = |\mathcal{C}|$ la cardinalità di questo insieme), e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un sottoinsieme chiuso verso il basso di $\mathcal{C}$. Vogliamo trovare un elemento $x \notin Y$ tale che i soli sottoinsiemi consistenti di $Y \cup \{x\}$ siano quelli della forma $A \cup \{x\}$ per $A \in \mathcal{A}$.

Per un $x \notin Y$ fissato, esistono esattamente k sottoinsiemi non-singoletti di $Y \cup \{x\}$ che contengono x, e per ognuno di essi dobbiamo decidere se si tratta di un insieme consistente o no. Chiaramente, quegli insiemi A che includono x tali che $A \setminus \{x\}$ non è consistente sono, per così dire, fuori gioco, perché certamente (con probabilità 1) non saranno nel predicato di consistenza. Dobbiamo solo preoccuparci degli insiemi della forma $B \cup \{x\}$ con $B \in \mathcal{C}$; per ognuno di essi, c'è una probabilità $\frac{1}{2}$ che l'insieme sia incluso (o non incluso) nel predicato di consistenza. Così la probabilità che x soddisfi esattamente le nostre esigenze è semplicemente $\frac{1}{2^M}$.

Allora, la probabilità che *nessun x soddisfi* la saturazione è

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2^M})^n$$

poiché la scelta è fatta in modo indipendente per ogni x; questo limite è zero, a meno che $\mathcal{C} = \emptyset$ (il che non succede mai), e quindi $\mathcal{T}_{RAND}$ ha la proprietà di saturazione con probabilità 1.

Si noti che, anche in questo caso, potremmo porre la probabilità uguale a qualunque $p \in (0,1)$ ed otterremmo comunque lo stesso risultato, come nel caso degli spazi di tolleranza ordinari.

4.6.3 Costruzione probabilistica della MeES universale

Vogliamo ora stabilire una costruzione probabilistica per la MeES universale omogenea, che denoteremo con $\mathcal{E}_{RAND}$. Si prenda ω come insieme di eventi, e si consideri la stessa enumerazione fissata $A_0, A_1, A_2, \ldots$ di $\wp_{\text{fin}}(\omega)$ del paragrafo 4.6.2. Stavolta ci serve anche una enumerazione $(e_0, B_0), (e_1, B_1), \ldots$ di $\omega \times \wp_{\text{fin}}(\omega)$ che soddisfi i seguenti vincoli

1. l'enumerazione è iniettiva; cioè, se $i \neq j$ allora o $e_i \neq e_j$, oppure $B_i \neq B_j$ (o entrambe);

2. se $B \subset B_i$, allora esiste qualche $j < i$ tale che $e_j = e_i$ e $B = B_j$.

Questo si può facilmente ottenere considerando in primo luogo la codifica standard (inversa) di Cantor per l'insieme $\omega \times \omega$, cioè $(\mathrm{left}, \mathrm{right}) : \omega \to \omega \times \omega$ rappresentata nel diagramma:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 2 & 5 & 9 & \dots & \\ 1 & 1 & 4 & 8 & \dots & & \\ 2 & 3 & 7 & \dots & & & \\ 3 & 6 & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{array}$$

Ora, si definisca, per ciascun $i \in \omega$, $e_i = \mathrm{left}(i)$ e $B_i = A_{\mathrm{right}(i)}$. L'iniettività segue dal fatto che $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ è iniettiva; l'altra proprietà segue dall'analoga proprietà degli A_i, e dal fatto che la proiezione della codifica di Cantor su ciascuna riga (o colonna) è una endofunzione strettamente crescente di ω.

Siamo allora pronti ad esprimere gli algoritmi probabilistici usati per stabilire il predicato di consistenza Con_{RAND} e la relazione di abilitazione $\vdash_{RAND}$. Il primo è descritto come nel Paragrafo 4.6.2; per il secondo, si procede come segue. In primo luogo, si formi una sequenza binaria $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ con la procedura definita, per ogni i, come segue:

1. se c'è un $j < i$ tale che $e_j = e_i$ e $\alpha_j = 1$, si ponga $\alpha_i = 0$;

2. altrimenti, si ponga $\alpha_i = 1$ con probabilità $\frac{1}{2}$.

Seguendo questa procedura, per ogni $e \in \omega$, l'insieme $\{i \in \omega : \alpha_i = 1 \wedge e_i = e\}$ è vuoto oppure è un singoletto formato da un unico indice, diciamo i_e. Si ponga, per ogni insieme $B \in \mathrm{Con}_{RAND}$ ed ogni $e \in \omega$

$$B \vdash_{RAND} e \text{ se e solo se } i_e \text{ esiste, } B_{i_e} \in \mathrm{Con}_{RAND} \text{ e } B_{i_e} \subseteq B.$$

Si osservi che questo predicato è decidibile: per ogni B, ci sarà un indice j tale che $B = B_j$, e quindi la sottosequenza $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$ è sufficiente per decidere se $B \vdash_{RAND} e$ oppure no. Inoltre, la struttura è una MeES; μ_e esiste solo se i_e esiste e $B_{i_e} \in \mathrm{Con}_{RAND}$, ed in quel caso $\mu_e = B_{i_e}$.

Dovremmo a questo punto mostrare la proprietà di saturazione per $\mathcal{E}_{RAND}$. Seguiamo le linee, ed usiamo la stessa notazione, della dimostrazione del Teorema 4.3.5. Per un $y \notin Y$ fissato, la probabilità che y sia consistente con tutti e soli quei sottoinsiemi di Y che appartengono a $\mathcal{C}$ è semplicemente $\frac{1}{2^M}$, dove $M = |\mathrm{Con}^Y_{RAND}|$.
Ora, dobbiamo considerare la probabilità che un y sia abilitato nei modi descritti dalla formula di pagina 63 (la dimostrazione per x è simile, ed omessa): questa è la probabilità che i_y esista e $B_{i_y} = A$. Dobbiamo considerare tutti gli indici j tali che $e_j = y$: ci sarà un certo indice $\hat{\jmath}$ tale che $e_{\hat{\jmath}} = y$ e $B_{\hat{\jmath}} = A$. Ora, la probabilità che $\alpha_{\hat{\jmath}} = 1$ è 1 meno la probabilità che $\alpha_j = 1$ per qualche $j < \hat{\jmath}$, o $j > \hat{\jmath}$. Chiaramente, ci sono $K = |\wp(A)| - 1$ indici j più piccoli di $\hat{\jmath}$ tali che $e_j = y$, e la probabilità che uno di essi sia "1" è $1 - \frac{1}{2^K}$. Quindi la probabilità che $\alpha_{\hat{\jmath}} = 1$ è precisamente $\frac{1}{2^{K+1}}$.

Allora, l'evento congiunto che ci interessa ha probabilità $\frac{1}{2^{M(K+1)}}$ per un y fissato. La probabilità che y non esista è quindi

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^{M(K+1)}})^n$$

che è 0. Quindi y (ed anche x, per motivi analoghi) esiste con probabilità 1, qualunque sia la scelta di $Y \subseteq_{\mathrm{fin}} \omega$, $A \in \mathrm{Con}_{RAND}$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Con}^Y_{RAND}$ (con $\mathcal{C} \neq \emptyset$).

Questo dimostra che $\mathcal{E}_{RAND}$ è isomorfo alla struttura $\mathcal{E}_U$ del Teorema 4.3.5 con probabilità 1.

4.7 Sommario dei risultati di universalità

Nella tabella che segue, per comodità del lettore, riassumiamo i risultati di universalità ottenuti in questo capitolo. In ogni riga della tabella, indichiamo un tipo di rappresentazione, e la corrispondente categoria di domini. Nelle ultime due colonne diamo un riferimento al risultato (ai risultati) di universalità. sia per le rappresentazioni che per i domini; un asterisco indica che è stata anche provata l'omogeneità.

Rappresentazioni	Domini	Risultati di universalità per rappresentazioni	Risultati di universalità per domini
spazi di tolleranza	domini dI coerenti atomici	*Teor. 4.3.1; *Sottosez. 4.6.1	*Cor. 4.3.1
spazi di tolleranza gen.	domini dI atomici	*Teor. 4.3.3; *Sottosez. 4.6.2	*Cor. 4.3.2
strutt.eventi con abil.min.	domini dI	*Teor. 4.3.5; *Sottosez. 4.6.3	Cor. 4.3.4
strutture di eventi prime automi traccia pieni	domini dI coerenti	—	Teor. 4.5.5

Capitolo 5

Spazi di tolleranza ed approssimazione

5.1 Introduzione. Perché gli spazi di tolleranza?

In questo capitolo intendiamo discutere in maggior dettaglio la nozione di spazio di tolleranza, dedicando particolare attenzione alle possibili applicazioni di questa nozione alla teoria della misurazione e dell'approssimazione.

L'importanza del concetto di "tolleranza" è ben descritta da Shreyder in [Shr71], dove si afferma che:

> The familiar concept of equivalence allows us to partition a set of objects into classes of "identical" objects from any particular point of view. However, in a number of cybernetic problems, it is more convenient to speak not of identical objects but rather of similar or indistinguishably different objects. For example, we may speak of points that are indistinguishably different for the eye, of words that are similar in meaning, of interchangeable members of a single collective, etc.

Zeeman [Zee62] introdusse il nome di relazione di tolleranza per indicare quelle relazioni formali che sono adatte a catturare l'essenza di questa definizione di indistinguibilità; in seguito, queste relazioni furono meglio studiate in diversi contesti (da Kalmar [Kal67] per la descrizione di un modello formale per la semantica; da Khalimsky et al. [KKM90] nell'ambito della topologia digitale e della computer graphics; da Shreyder stesso, con applicazioni alla teoria delle tassonomie non rigide [Shr68a] e alla struttura dei collettivi [Shr68b]). Più di recente si sono avuti nuovi sviluppi nello studio delle relazioni di tolleranza grazie all'analisi fuzzy [TS95, Thi96b, Thi96a].

Naturalmente, la differenza cruciale fra la definizione di relazione di equivalenza e quella di relazione di tolleranza è data dalla "transitività". Se si debba o meno considerare come assioma la transitività dell'indifferenza è stato largamente discusso, fin dai primi lavori in psicometria degli anni Cinquanta.

Un esempio classico contro la transitività dell'indifferenza è il seguente, dovuto a Luce [Luc56]: la maggior parte delle persone preferisce una tazza di caffè con un cucchiaino di zucchero a una con cinque cucchiaini; eppure, se aggiungessimo zucchero alla prima tazza 1/100 di grammo per volta, chiunque sarebbe certamente indifferente fra due tazze successive. Se l'indifferenza fosse transitiva, tutti dovrebbero anche essere indifferenti fra la tazza con un cucchiaino di zucchero e quella con cinque cucchiaini. Quindi, l'indifferenza non dovrebbe essere considerata transitiva nel caso delle preferenze, e potremmo anche trovare molti altri casi di intransitività in numerose altre situazioni pratiche. Cosa possiamo dire invece delle misurazioni fisiche? Nella situazione ideale in cui gli strumenti di misurazione siano perfetti e diano sempre risposte precise, la relazione di indifferenza dovrebbe coincidere con l'identità. Ma la cruda verità è che gli strumenti *non sono* infinitamente precisi, e la capacità di discriminazione degli esseri umani che usano (e leggono) questi strumenti è limitata: per questi motivi, la transitività dell'indifferenza rimane una chimera anche nel caso della misurazione di grandezze fisiche.

Anche Parikh [Par83] presenta molti paradossi originati dalla falsa speranza che la transitività valga nelle situazioni della vita quotidiana. In particolare, egli cita un famoso problema (discusso anche da Michael Dummett [Dum75] e Crispin Wright [Wri75]):

> Imagine a series of coloured patches, beginning with a red patch. Suppose, moreover, that the colour from patch to patch changes gradually so that the last patch is quite clearly not red. However, the change is so gradual that each patch is — to the eye — quite indistinguishable from the next in colour. Now [. . .] is there a last red patch in this series? Clearly there must be one since the series doesn't stay red forever. However, if there *is* such a last red patch, then the next one, indistinguishable from it in colour, is nonetheless *not* red. And surely that is absurd. Hence the paradox.

A questo punto, pensiamo che il lettore sia convinto dell'importanza di studiare relazioni intransitive (cioè relazioni di tolleranza) e di applicarle al contesto della misurazione, in particolare nel campo della percezione e delle scienze sociali (ma non soltanto).

5.2 Un esempio — Conversione analogico-digitale e doublescales

Nel suo articolo [Smi93], Einar Smith presenta un interessante esempio di come l'intransitività dell'indifferenza compaia in modo naturale nella misurazione fisica e nell'informatica, e introduce una soluzione tecnica a questo problema definendo la nozione di "doublescale".

Si consideri il problema comune di realizzare una conversione analogico-digitale: in altre parole, supponiamo che si debba progettare una certa macchina in grado di leggere la posizione fisica di un puntatore su una scala analogica (cioè su una scala continua) e di produrre un valore digitale (cioè discreto) in output. Possiamo assumere che la scala sia divisa in segmenti di egual lunghezza, ognuno rappresentante un valore digitale. Avendo il puntatore uno spessore non trascurabile, quando esso si sovrapponesse al bordo di uno dei segmenti, il convertitore non avrebbe modo di stabilire il corretto valore da indicare (vedi Fig. 5.1).

Per superare questo problema, si potrebbero usare due puntatori, uno spostato leggermente rispetto all'altro, e scegliere con qualche criterio logico fra gli output disponibili. Oppure, invece di usare due puntatori paralleli, si potrebbe usare un singolo puntatore

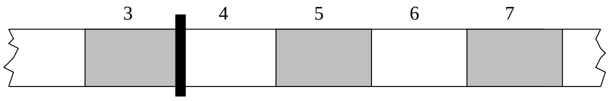


Figura 5.1: Una scala analogica con un puntatore

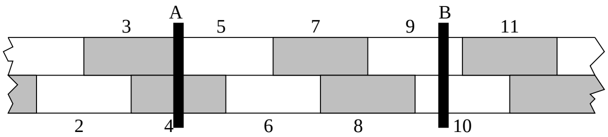


Figura 5.2: Due scale

con due scale spostate l'una rispetto all'altra, come in Fig. 5.2. Come si può vedere, per esempio, quando il puntatore è nella posizione A non c'è nessun valore disponibile nella scala in alto, ma esiste un valore corretto (non ambiguo) nella scala in basso (poiché il puntatore è decisamente all'interno del segmento 4). In generale, per ogni possibile posizione del puntatore, esiste almeno una lettura non ambigua su una delle due scale. In taluni casi, però, ci sono due valori corretti, come in posizione B, dove i valori 9 e 10 sono entrambi possibili. Qual è quello "giusto"? quale dovremmo emettere in output?

Non è possibile rispondere a questa domanda: infatti, si può dire che entrambi i valori sono "giusti", perché sono entrambi possibili. In un certo senso questo significa che lo scenario effettivo è compatibile con entrambi i valori: o, detto altrimenti, le due proposizioni "il valore corretto è 9" e "il valore corretto è 10" sono non contraddittorie, a causa dei limiti (inerenti) del grado di risoluzione degli strumenti.

Questa considerazione ha un forte impatto nel modo in cui scegliamo di costruire le nostre scale di misura; infatti, anche se la grandezza che stiamo misurando è di tipo scalare, non esisterà un ordinamento lineare (totale) fra i suoi valori. Avremo invece un ordine parziale, che riflette l'impossibilità di fare confronti fra valori indistinguibili. Osservando le due scale spiazzate, per esempio, potremo certamente dire che il valore 3 è "decisamente inferiore" al valore 8, poiché i due valori sono incompatibili (cioè sono distinguibili per mezzo del nostro strumento di misurazione), ma i due valori 3 e 4 sono "indistinguibili" nel senso che non abbiamo alcun modo per confrontarli. In effetti, potremmo costruire due convertitori diversi in modo tale che la stessa posizione del puntatore venga interpretata come 3 dal primo convertitore, e come 4 dal secondo, a causa di una diversa logica interna utilizzata per scegliere il valore corretto da emettere, quando ne esistano due possibili.

In altre parole, la nostra scala di misura sarà l'ordine parziale rappresentato in Fig. 5.3. In pratica, questo corrisponde al poset $(\mathbb{Z}, \ll)$ dove

$$x \ll y \text{ se e solo se } x + 1 < y.$$

Ci riferiremo a questo poset come alla *doublescale*[1]. Più avanti, introdurremo la nozione di semiordine, e dimostreremo che la doublescale è un esempio di semiordine. Per ora,

[1] Questa non è la definizione data in [Smi93], dove una doublescale è definita essere un qualunque sottoposet di $(\mathbb{Z}, \ll)$ indotto da un intervallo di $\mathbb{Z}$. Comunque, qualsiasi poset di questo tipo è effettivamente una sottostruttura di $(\mathbb{Z}, \ll)$, come [Smi93] osserva in Example 4.11.

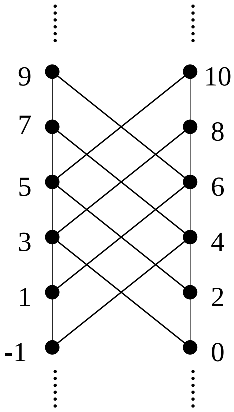


Figura 5.3: Diagramma di Hasse di una doublescale

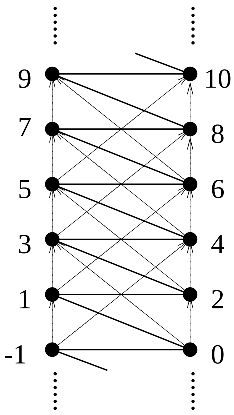


Figura 5.4: La co-doublescale

comunque, ci accontentiamo di osservare che la relazione di incomparabilità di questo semiordine *non* è una relazione di equivalenza, ma piuttosto una relazione di tolleranza.

In Fig. 5.4 mostriamo questa relazione di tolleranza: questa è precisamente la relazione $\approx$ definita ponendo

$$x \approx y \text{ se e solo se } |x - y| \leq 1.$$

Lo spazio di tolleranza $(\mathbb{Z}, \approx)$ viene chiamato *co-doublescale*, e sarà denotato con $\mathcal{Z}$. Si noti che $\mathcal{Z}$, visto come grafo, è semplicemente un cammino bi-infinito su una quantità numerabile di vertici (o, se si preferisce, è la chiusura riflessiva e simmetrica della relazione di copertura associata all'ordinamento usuale degli interi).

5.3 Spazi di tolleranza e funzioni continue

Nel Capitolo 4 abbiamo considerato la categoria **TolSp** degli spazi di tolleranza[2] con immersioni; ora discuteremo brevemente l'importanza delle funzioni continue rispetto al-

[2]In questo capitolo, i termini "spazio di tolleranza" e "grafo (non orientato)" saranno spesso usati come sinonimi; quindi parleremo di "punti" o di "vertici" (nodi) per riferirci ad elementi dello spazio (grafo),

la tolleranza, e introdurremo quindi una supercategoria di **TolSp**, in cui le frecce sono rappresentate da funzioni continue. Come dimostreremo, questa categoria contiene tutti i limiti di ω-catene, e possiamo dare una costruzione semplice e diretta per tali limiti (inversi).

Chiamiamo **cTolSp** la categoria degli spazi di tolleranza (al più numberabili), con funzioni continue rispetto alla tolleranza. Come al solito, ove non diversamente specificato, se $\mathcal{T}$ è uno spazio di tolleranza, allora X rappresenta l'insieme soggiacente e co la relazione di tolleranza. Inoltre, se $\langle X_i \rangle_{i\in\omega}$ è una ω-sequenza di insiemi, gli elementi di $\prod_{i\in\omega} X_i$ saranno denotati con lettere in grassetto, come $\mathbf{x}$, mentre x_i denoterà l'i-esimo elemento di $\mathbf{x}$.

Teorema 5.3.1 *La categoria* **cTolSp** *contiene i limiti inversi delle ω-cocatene.*

Dimostrazione: Sia $(\mathcal{T}_n, f_n)_{n\in\omega}$ una ω-cocatena di spazi di tolleranza. Si considerino le seguenti definizioni:

- X_∞ è il sottoinsieme di $\prod_{n\in\omega} X_n$ contenente solo quei vettori $\mathbf{x}$ tali che, per ogni $n \in \omega$, $f_n(x_{n+1}) = x_n$;
- due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_\infty$ sono in relazione co_∞ se e solo se, per ogni $n \in \omega$, vale che $x_n \; \mathrm{co}_n \; y_n$.

Sia $\mathcal{T}_\infty$ lo spazio di tolleranza $(X_\infty, \mathrm{co}_\infty)$ così definito, e si consideri, per ogni $n \in \omega$, la funzione $\psi_n : X_\infty \to X_n$ che rappresenta l'n-esima proiezione, cioè $\psi_n(\mathbf{x}) = x_n$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in X_\infty$. Chiaramente, le ψ_n sono funzioni continue. Inoltre, per ogni $\mathbf{x} \in X_\infty$ si ha $f_n(\psi_{n+1}(\mathbf{x})) = f_n(x_{n+1}) = x_n = \psi_n(\mathbf{x})$ come richiesto per un cono. Sia ora $\mathcal{T}$ uno spazio di tolleranza, dotato di funzioni continue $\phi_n : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_n$ tali che $f_n \circ \phi_{n+1} = \phi_n$. Si definisca $h : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_\infty$ come la funzione che mappa $t \in \mathcal{T}$ nella sequenza $h(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t), \dots)$. Questa è ben definita, e inoltre è continua: infatti, se $t \,\mathrm{co}\, t'$ allora anche $\phi_n(t) \;\mathrm{co}_n\; \phi_n(t')$ (per la continuità delle ϕ_i), e quindi anche $h(t) \;\mathrm{co}_\infty\; h(t')$. Ora, per ogni $t \in T$ si ha $\psi_n(h(t)) = (h(t))_n = \phi_n(t)$, cioè $\psi_n \circ h = \phi_n$, come richiesto. Si supponga infine che h' sia un'altra funzione dello stesso tipo; allora, per ogni $t \in T$ dovremmo avere $\psi_n(h'(t)) = \phi_n(t)$, il che implica $h = h'$; ciò garantisce l'unicità. □

Introduciamo a questo punto alcune notazioni che torneranno utili nel seguito. Se $(\mathcal{T}_n, f_n)_{n\in\omega}$ è una ω-cocatena, definiamo, per ogni $n \leq m$, la funzione $f_n^m : \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n$ come la funzione (continua) $f_n \circ f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1}$ (per definizione, f_n^n si prende uguale all'identità di $\mathcal{T}_n$). Si osservi che, se $\mathcal{T}_\infty$ è il limite inverso della catena, allora, per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_\infty$ e per ogni scelta di $n \leq m$, vale:

$$f_n^m(x_m) = f_n(f_{n+1}(\cdots f_{m-1}(x_m)\cdots)) = \\ f_n(f_{n+1}(\cdots f_{m-2}(x_{m-1})\cdots)) = \cdots = f_n(x_{n+1}) = x_n.$$

Un punto importante, qui, è la transitività. Uno spazio di tolleranza è *transitivo* se la relazione di tolleranza lo è; da un punto di vista della teoria dei grafi, uno spazio

e useremo le parola "arco" per indicare una coppia di punti co-relati. Queste ambiguità non dovrebbero confondere il lettore.

di tolleranza è transitivo se e solo se ogni componente connessa è una clique (cioè, un grafo completo). Un caso molto speciale di transitività si verifica quando la relazione di tolleranza sia l'identità (nel qual caso si parla di uno spazio *totalmente disconnesso*).

Una domanda naturale è la seguente: supponiamo di avere una ω-cocatena di spazi di tolleranza, ognuno dei quali si supponga rappresentare un certo "grado di risoluzione" di uno strumento di misura. L'intransitività si verifica perché ci sono alcuni valori indistinguibili (ma differenti) che lo strumento può dare in output. Ovviamente, possiamo migliorare il potere di risoluzione del nostro strumento, prendendone uno più accurato. In questo caso, avremo in generale più punti e approssimazioni migliori. Le funzioni di proiezione della ω-cocatena rappresentano precisamente il fatto che ogni punto nello spazio di tolleranza (più accurato) $\mathcal{T}_{n+1}$ è una miglior approssimazione di un punto dello spazio (meno accurato) $\mathcal{T}_n$; la continuità serve a garantire che non possiamo introdurre minore accuratezza (cioè, se non possiamo distinguere due punti al livello $n+1$ non potevamo distinguerli nemmeno al livello n).

Comunque, almeno nel limite, la nostra speranza è di avere un'accuratezza infinita nella misurazione, e quindi uno spazio di tolleranza transitivo. C'è qualche modo (formale) di esprimere questa situazione. In altre parole, c'è un modo di esprimere una condizione sull'ω-cocatena che sia equivalente alla transitività del suo limite (inverso)?

Per risolvere questo problema, introduciamo la nozione di tripletta intransitiva. Una *tripletta intransitiva* (o una "V") di uno spazio di tolleranza $\mathcal{T}$ è una terna $(x, y, z) \in X^3$ tale che $x \operatorname{co} y$, $y \operatorname{co} z$ ma $\neg(x \operatorname{co} z)$. Definiamo $V(\mathcal{T})$ l'insieme di tutte le triplette intransitive di $\mathcal{T}$.
Si noti che $\mathcal{T}$ è transitivo se e solo se non ha V, cioè quando $V(\mathcal{T}) = \emptyset$. Inoltre, banalmente:

Proprietà 5.3.1 *Sia $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ continua, e $(x, y, z) \in V(\mathcal{T})$; allora o $(f(x), f(y), f(z)) \in V(\mathcal{T}')$ oppure essa è una clique di $\mathcal{T}'$ (cioè, gli elementi della terna sono a due a due co'-relati).* □

Data una ω-cocatena di spazi di tolleranza $(\mathcal{T}_n, f_n)_{n\in\omega}$, definiamo, per ogni $n \in \omega$ e per ogni $(x, y, z) \in V(\mathcal{T}_n)$

$$\tau(x, y, z) = \sup\{k \geq n : \exists (x', y', z') \in V(\mathcal{T}_k).\ f_n^k(x') = x, f_n^k(y') = y, f_n^k(z') = z\}.$$

Questo è chiamato il *tempo di risoluzione* di (x, y, z). In pratica, $\tau(x, y, z) = k < \infty$ significa che fino al livello k esiste qualche V che è una migliore approssimazione di (x, y, z) ma, non appena ci si muove ad un livello superiore, questo cessa di essere vero. Detto altrimenti, supponiamo di fare una misurazione usando l'n-esimo strumento, e di osservare una "contraddizione locale" alla transitività (cioè, una tripletta intransitiva). Possiamo provare a fare misurazioni sempre migliori, al fine di risolvere la nostra contraddizione, ma sappiamo che questa contraddizione sarà certamente risolta non più tardi del livello k (se siamo fortunati, anche prima!). Se invece $\tau(x, y, z) = \infty$ esiste almeno un caso in cui la nostra contraddizione non verrà *mai* risolta, e in linea di principio potremmo dover attendere in eterno, continuando a fare esperimenti sempre più accurati senza mai riuscire a risolvere la contraddizione.

Vale il seguente risultato:

Teorema 5.3.2 *Si consideri una ω-cocatena $(\mathcal{T}_n, f_n)_{n\in\omega}$, e si supponga che, per ogni $n \in \omega$ e $x \in X_n$, l'insieme $f_n^{-1}(x)$ sia finito. Allora, le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{T}_\infty$ è transitivo;*

2. *per ogni $n \in \omega$ e $(x, y, z) \in V(\mathcal{T}_n)$ vale che $\tau(x, y, z) < \infty$.*

Dimostrazione: (1) $\Longrightarrow$ (2). Si supponga che $\mathbf{x} \operatorname{co}_\infty \mathbf{y} \operatorname{co}_\infty \mathbf{z}$ e si assuma per assurdo che $\neg(x_n \operatorname{co}_n z_n)$ per qualche n. Allora $(x_n, y_n, z_n) \in V(\mathcal{T}_n)$; sia ora $k = \tau(x_n, y_n, z_n) + 1$: per definizione di τ non esiste alcuna terna $(x', y', z') \in V(\mathcal{T}_k)$ che venga mappata in (x_n, y_n, z_n) da f_n^k. Ma questo significa che (x_k, y_k, z_k) non è una V di $\mathcal{T}_k$ il che implicherebbe $x_k \operatorname{co}_k z_k$: questo è impossibile, perché allora, per continuità, dovremmo avere $x_n \operatorname{co}_n z_n$.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Si supponga che (2) non valga, cioè che ci sia qualche $n \in \omega$ e qualche $(x_n, y_n, z_n) \in V(\mathcal{T}_n)$ tali che $\tau(x_n, y_n, z_n) = \infty$. Questo significa che esiste una sequenza infinita di V $(x_n, y_n, z_n), (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \ldots$ tali che $f_i(x_{i+1}) = x_i$ (per ogni $i > n$). Ora, per ciascun $i < n$, si ponga $x_i = f_i^n(x_n)$, $y_i = f_i^n(y_n)$ e $z_i = f_i^n(z_n)$.
Per costruzione, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$,$\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots)$ e $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots)$ sono elementi di X_∞ e inoltre $\mathbf{x} \operatorname{co}_\infty \mathbf{y} \operatorname{co}_\infty \mathbf{z}$, ma $\neg(\mathbf{x} \operatorname{co}_\infty \mathbf{z})$ essendo $\neg(x_n \operatorname{co}_n z_n)$. □

Se le condizioni del teorema precedente sono verificate diciamo che la cocatena è *transitiva* (al limite). Questo non significa, però, che ogni elemento della cocatena sia transitivo, né che essa sia transitiva da un certo indice in poi.

In generale, la condizione di transitività è cruciale se vogliamo usare una catena di strumenti di misura, ma non è sufficiente. Infatti, non ci dà garanzie sul fatto che il tempo che dobbiamo aspettare prima che una contraddizione (una "V") venga risolta sia limitato. Potrebbe dipendere dalla specifica terna, o dallo specifico livello di risoluzione. Per questo motivo, introduciamo due nuove definizioni.

Per una ω-cocatena $(\mathcal{T}_n, f_n)_{n\in\omega}$, e per ogni $n \in \omega$:

- si definisca $\tau_n^* = \sup\{\tau(x, y, z) : (x, y, z) \in V(\mathcal{T}_n)\}$ (il *tempo di risoluzione al livello* n);

- sia $\tau^* = \sup_{n\in\omega}(\tau_n^* - n)$ (il *tempo di attesa globale*).

Diremo che la cocatena è *transitiva localmente limitata* (abbreviato con lb-transitiva) se ha tempo di risoluzione finito ad ogni livello (cioè se $\tau_n^* < \infty$ per tutti gli $n \in \omega$); è *transitiva limitata* (abbreviato con b-transitiva) se ha tempo di attesa globale finito (cioè se $\tau^* < \infty$).

5.4 Un esempio — La rappresentazione con cifre negative per i reali

Consideriamo il problema di rappresentare i numeri reali usando qualche approccio che consenta di tener conto delle approssimazioni. Per semplicità, limitiamoci all'intervallo unitario $I = [0, 1]$: il modo più comune per rappresentare un elemento di I consiste nell'usare una sequenza infinita di bit.

Più precisamente, definiamo una funzione[3]

$$\begin{array}{lll} \phi : & \{0,1\}^\omega & \to I \\ & \mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots & \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} d_i 2^{-i} \end{array}$$

che è suriettiva, e quindi consente di rappresentare ogni punto di I con qualche sequenza infinita. Si noti che ϕ *non* è una biiezione, poiché ogni razionale diadico[4] ha due rappresentazioni (per esempio, le sequenze $01111\ldots$ e $10000\ldots$ rappresentano entrambe il numero reale $1/2$).

Questa rappresentazione è nota come *rappresentazione con cifre positive in base 2* (abbreviato in 2-PDR). Naturalmente, possiamo generalizzarla ad ogni base $b > 1$, rappresentando i reali con sequenze di cifre prese dall'insieme $\Gamma_b = \{0, 1, \ldots, b-1\}$, definendo la funzione di rappresentazione come segue

$$\begin{array}{lll} \phi : & \{0,1\}^\infty & \to I \\ & \mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots & \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} d_i b^{-i}. \end{array}$$

Questa è chiamata b-PDR; il modo usuale per scrivere i numeri reali (la notazione decimale) corrisponde alla 10-PDR.

Come notato in [Sün95] ci sono due problemi legati alla rappresentazione con cifre positive:

- in primo luogo, essa non è iniettiva: alcuni numeri hanno più di una rappresentazione (abbiamo già osservato questo fenomeno nel caso binario);

- inoltre (ciò che è ancora più rilevante quando si consideri l'approssimazione) l'addizione non è calcolabile. Per spiegare quest'asserzione apparentemente sconcertante dobbiamo introdurre la nozione di troncamento finito. Ogni prefisso iniziale (finito) di una sequenza che rappresenti un numero reale si può pensare come un approssimazione di quel numero; per fare questo, possiamo estendere la funzione ϕ a sequenze *finite*, ponendo:

$$\begin{array}{lll} \phi : & \Gamma_b^* & \to I \\ & \mathbf{d} = d_1 \ldots d_n & \mapsto \sum_{i=1}^{n} d_i b^{-i}. \end{array}$$

  Ora, una sequenza finita può rappresentare qualsiasi numero (non approssimato) di cui è prefisso, così , se $\preceq$ denota la relazione di prefisso fra sequenze, la sequenza $\mathbf{d}$ viene interpretata come l'intero insieme $\{\mathbf{e} \in \Gamma_b^\omega : \mathbf{d} \preceq \mathbf{e}\}$ o, più precisamente, come l'insieme dei numeri reali $\{\phi(\mathbf{e}) : \mathbf{e} \in \Gamma_b^\omega \wedge \mathbf{d} \preceq \mathbf{e}\}$. Questo è ovviamente un intervallo chiuso di numeri reali. Così , per esempio, la sequenza finita $\mathbf{d} = 011010$ è mappata in

$$\phi(\mathbf{d}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$$

  e rappresenta l'intervallo chiuso $[\frac{13}{32}, \frac{14}{32}]$ (l'estremo sinistro è rappresentato dalla sequenza infinita **011010**0000..., l'estremo destro da **011010**1111...). Come si può

[3]Per ogni insieme finito Σ, indicheremo con Σ^* (Σ^ω, Σ^∞) l'insieme delle stringhe finite (infinite, finite ed infinite, risp.) su Σ. Useremo il simbolo $\preceq$ per indicare la relazione di prefisso fra stringhe; cioè $w \preceq v$ significa che w è un prefisso di v (eventualmente improprio).

[4]Un razionale diadico è un razionale della forma $m/2^n$, con $m, n \in \mathbb{Z}$.

vedere, $\phi(\mathbf{d})$ è un estremo dell'intervallo e non — come probabilmente vorremmo — il centro.

Questo ha alcuni spiacevoli effetti collaterali: supponete di avere due versioni approssimate di due numeri reali, come ad esempio:

$$\mathbf{d}_1 = 0111 \qquad \mathbf{d}_2 = 0000$$

e di voler calcolare la (una versione approssimata della) loro somma. Ora:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{d}_1) &= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}\\ \phi(\mathbf{d}_2) &= 0\end{aligned}$$

cosicché $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ rappresentano gli intervalli $A_1 = [\frac{7}{16}, \frac{1}{2}]$ e $A_2 = [0, \frac{1}{16}]$. La loro somma è quindi nell'intervallo $B = [\frac{7}{16}, \frac{9}{16}]$: quindi il risultato dovrebbe essere una sequenza troncata $\mathbf{e}$ cui corrisponda un intervallo C che includa B. Naturalmente, la sola sequenza che soddisfi questo vincolo è la sequenza vuota (che corrisponde, per definizione, ad I), poiché già le sequenze di una sola cifra 0 (che corrisponde all'intervallo $[0, 1/2]$) e 1 (che corrisponde a $[1/2, 1]$) non sono abbastanza precise.

Quindi, in questo caso, anche se possediamo un'approssimazione di 4 cifre dei due addendi, non possiamo dare nemmeno una singola cifra di approssimazione per il risultato.

Da un punto di vista più astratto, il problema della rappresentazione con cifre positive è che non è adatta a trattare le approssimazioni, in quando l'approssimazione si intende "simmetrica", cioè l'intervallo di incertezza rappresentato da una sequenza approssimata dovrebbe avere come centro il valore rappresentato dalla sequenza.

Per risolvere questo problema, usando un'idea espressa da Cauchy [Cau40] e usata in modo esteso da [Gia93] (si veda anche [Bol95]), dobbiamo trovare un modo per codificare i numeri reali tale che ogni cifra possa dare un contributo negativo o positivo: questo introduce una sorta di ridondanza ma ci permette di superare le difficoltà sopra menzionate ([Smy92], Example 5.0.13).

Diamo ora una definizione precisa. Per ogni intero $b > 1$ (chiamato "base"), chiamiamo $\Sigma_b = \{i \in \mathbb{Z} : |i| < b\}$ l'insieme delle *cifre con segno* in base b. Definiamo una funzione $\phi_b : \Sigma_b^\omega \to \mathbb{R}$ che opera come segue:

$$\phi_b(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{d}|} d_i b^{-i}.$$

D'ora innanzi supporremo che sia stata fissata una base $b > 1$, ed ometteremo l'indice b. Si noti che:

Lemma 5.4.1 *L'immagine di Σ^ω rispetto a ϕ è $[-1, 1]$.*

Dimostrazione: Si noti in primo luogo che, per ogni $\mathbf{d} \in \Sigma^\omega$

$$-(b-1)\sum_{i=1}^{\infty} b^{-i} \le \phi(\mathbf{d}) \le (b-1)\sum_{i=1}^{\infty} b^{-i}.$$

Essendo $\sum_{i=0}^{\infty} b^{-i} = \frac{b}{b-1}$, e quindi $\sum_{i=1}^{\infty} b^{-i} = \frac{1}{b-1}$, otteniamo

$$-1 \leq \phi(\mathbf{d}) \leq 1.$$

Per la suriettività, notate che dobbiamo solo dimostrare la suriettività sull'intervallo $[0,1]$, poiché, se $\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots$ è tale che $\phi(\mathbf{d}) = \alpha$, allora la sequenza $\mathbf{e} = (-d_1)(-d_2)\ldots$ viene mappata in

$$\phi(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{\infty} (-d_i) b^{-i} = -\phi(\mathbf{d}) = -\alpha.$$

Ora sia $\alpha \in [0,1)$ (la rappresentazione di 1 è data dalla sequenza $(b-1)(b-1)\ldots$). Costruiremo tre sequenze $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, r_0, r_1, \ldots \in [0,1]$ e $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ tali che, per ogni $i \geq 0$, $\alpha_i \in [0, b^{-i})$.

Induttivamente, poniamo prima $\alpha_0 = \alpha \in [0,1)$ e $r_0 = 0$. Ora, per assegnare $\alpha_{i+1}, r_{i+1}, d_{i+1}$, consideriamo gli intervalli $I_k = [kb^{-(i+1)}, (k+1)b^{-(i+1)})$ per $k = 0, \ldots, b-1$: essi sono disgiunti e la loro unione dà $[0, b^{-i})$. Quindi, per ipotesi induttiva, esiste (esattamente) un k tale che $\alpha_i \in I_k$; poniamo:

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= k \\ r_{i+1} &= r_i + d_{i+1} b^{-(i+1)} \\ \alpha_{i+1} &= \alpha_0 - r_{i+1}. \end{aligned}$$

Si consideri la sequenza $\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{d}) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{i+1} b^{-(i+1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1} - r_i) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (r_{i+1} - r_i) = \lim_{n\to\infty} r_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha_0 - \alpha_n) = \alpha - \lim_{n\to\infty} \alpha_n. \end{aligned}$$

Ma $\alpha_n \in [0, b^{-n}]$, e quindi $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$; perciò $\phi(\mathbf{d}) = \alpha$, come richiesto. □

Il Lemma 5.4.1 mostra che possiamo rappresentare ogni numero reale nell'intervallo $[-1,1]$ per mezzo di una sequenza infinita: come già osservato, questa non è una codifica biiettiva per i reali, ma è per lo meno suriettiva. Chiaramente ogni sequenza *finita* dovrebbe essere correttamente interpretata come intervallo (chiuso) sulla retta reale, come suggerito dalla seguente definizione.

Definiamo $\psi : \Sigma^* \to \wp(\mathbb{R})$ la seguente funzione

$$\psi(\mathbf{d}) = [\phi(\mathbf{d}) - b^{-|\mathbf{d}|}, \phi(\mathbf{d}) + b^{-|\mathbf{d}|}].$$

Ora, per ogni $n \geq 0$, sia $T_n = \Sigma^n$ e co_n sia una relazione binaria su T_n definita come segue:

$$\mathbf{d}\ \mathrm{co}_n\ \mathbf{e} \text{ se e solo se } |\phi(\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{e})| \leq 2b^{-n},$$

o, equivalentemente, se e solo se $\psi(\mathbf{d}) \cap \psi(\mathbf{e}) \neq \emptyset$. Naturalmente co_n è una relazione di tolleranza (è simmetrica e riflessiva), ma non è in generale transitiva: corrisponde alla relazione di inconfrontabilità di un semiordine (questa è una conseguenza diretta del teorema di rappresentazione di Scott-Suppes [SS58]). Usiamo $\mathcal{R}_n$ per denotare lo spazio di tolleranza (T_n, co_n). È possibile dare una interpretazione diretta di co_n facendo uso della nozione di approssimazione, come nel seguente

Lemma 5.4.2 *Per ogni n, e per ogni $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in T_n$, vale che $\mathbf{d}\ \mathrm{co}_n\ \mathbf{e}$ se e solo se esistono $\mathbf{d}', \mathbf{e}' \in \Sigma^\omega$ tali che $\mathbf{d} \preceq \mathbf{d}'$, $\mathbf{e} \preceq \mathbf{e}'$ e $\phi(\mathbf{d}') = \phi(\mathbf{e}')$.*

Dimostrazione: Solo se. Sia $\alpha = \frac{b^n}{2}(\phi(\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{e}))$: ovviamente $\alpha \in [-1, 1]$. Perciò, per il Lemma 5.4.1, esistono $\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^- \in \Sigma^\omega$ tali che $\phi(\mathbf{f}^+) = \alpha$ e $\phi(\mathbf{f}^-) = -\alpha$. Siano ora

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{d}' & = & d_1 d_2 \dots d_n f_1^- f_2^- \dots \\ \mathbf{d}' & = & e_1 e_2 \dots e_n f_1^+ f_2^+ \dots . \end{array}$$

Abbiamo che

$$\phi(\mathbf{d}') = \phi(\mathbf{d}) + \phi(\mathbf{f}^-) b^{-n} = \phi(\mathbf{d}) - \alpha b^{-n}$$

e

$$\phi(\mathbf{e}') = \phi(\mathbf{e}) + \phi(\mathbf{f}^+) b^{-n} = \phi(\mathbf{e}) + \alpha b^{-n}.$$

Ma $2\alpha b^{-n} = \phi(\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{e})$ che implica $\phi(\mathbf{d}) = 2\alpha b^{-n} + \phi(\mathbf{e})$ e perciò

$$\phi(\mathbf{d}') = 2\alpha b^{-n} + \phi(\mathbf{e}) - \alpha b^{-n} = \phi(\mathbf{e}) + \alpha b^{-n} = \phi(\mathbf{e}').$$

Se. Vale che

$$\phi(\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{e}) = \phi(\mathbf{d}') - \phi(d_{n+1} d_{n+2} \dots) b^{-n} - \phi(\mathbf{e}') + \phi(e_{n+1} e_{n+2} \dots) b^{-n}.$$

Essendo $\phi(e_{n+1} e_{n+2} \dots) - \phi(d_{n+1} d_{n+2} \dots) \in [-2, 2]$ otteniamo

$$|\phi(\mathbf{d}) - \phi(\mathbf{e})| \leq 2 b^{-n}.$$

$\square$

Il Lemma 5.4.2 potrebbe essere riformulato dicendo che due approssimazioni troncate alla n-esima cifra sono inconfrontabili rispetto a co_n precisamente quando sono prefissi di due sequenze infinite che rappresentano lo stesso numero reale.

Una conseguenza immediata del Lemma 5.4.2 è che la funzione $f_n : T_{n+1} \to T_n$ definita ponendo

$$f_n(d_1 \dots d_n d_{n+1}) = d_1 \dots d_n$$

è continua:

Corollario 5.4.1 *La funzione $f_n : \mathcal{R}_{n+1} \to \mathcal{R}_n$ è continua.* $\square$

In altre parole, $(\mathcal{R}_n, f_n)_{n \in \omega}$ è una ω-cocatena di spazi di tolleranza. Proveremo ora che è transitiva limitata; per farlo ci serve il seguente

Lemma 5.4.3 *Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_n$ allora $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})|$ è un multiplo intero di b^{-n}. Quindi, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V(T_n, \mathrm{co}_n)$ se e solo se esistono due interi k, h tali che $|k| \leq 2$, $|h| \leq 2$ e $|k + h| > 2$ per cui*

$$\begin{array}{rcl} \phi(\mathbf{x}) + k b^{-n} & = & \phi(\mathbf{y}) \\ \phi(\mathbf{y}) + h b^{-n} & = & \phi(\mathbf{z}). \end{array}$$

Dimostrazione: Per la prima parte, si ha

$$b^n(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})) = b^n \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)b^{-i} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)b^{n-i}$$

che è un intero. Ora, per la seconda parte, dal Lemma 5.4.2 segue che

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})| \leq 2b^{-n} \implies \phi(\mathbf{x}) + kb^{-n} = \phi(\mathbf{y})$$

per un'opportuna scelta di $k \leq 2$. Lo stesso vale per $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, ma

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{z})| > 2b^{-n}$$

e quindi

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{z})| = |\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) + \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{z})| = | - kb^{-n} - hb^{-n}| = |k + h|b^{-n}$$

il che termina la dimostrazione, provando che $|k + h| > 2$. □

Possiamo ora dimostrare che la catena è transitiva limitata con tempo di attesa globale 0 se la base b è maggiore di 2.

Teorema 5.4.1 *Se $b > 2$, allora la catena $(\mathcal{R}_n, f_n)_{n\in\omega}$ è transitiva limitata con tempo di attesa globale $\tau^* = 0$.*

Dimostrazione: Dobbiamo solo mostrare che ogni V non ha controimmagini che siano ancora delle V. Supponiamo, per assurdo, che $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V(T_n, \mathrm{co}_n)$ e anche $(\mathbf{x}\alpha, \mathbf{y}\beta, \mathbf{z}\gamma) \in V(T_{n+1}, \mathrm{co}_{n+1})$, per qualche scelta di $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$. Allora, per il Lemma 5.4.3, ci sono $k, h, k', h' \in \{-2, \ldots, 2\}$ tali che $|k + h| > 2$, $|k' + h'| > 2$ e

$$\begin{array}{rcl} \phi(\mathbf{x}) + kb^{-n} & = & \phi(\mathbf{y}) \\ \phi(\mathbf{y}) + hb^{-n} & = & \phi(\mathbf{z}) \\ \phi(\mathbf{x}\alpha) + k'b^{-(n+1)} & = & \phi(\mathbf{y}\beta) \\ \phi(\mathbf{y}\beta) + h'b^{-(n+1)} & = & \phi(\mathbf{z}\gamma). \end{array}$$

Ciò implica

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) + \alpha b^{-(n+1)} + k'b^{-(n+1)} = \phi(\mathbf{y}) + \beta b^{-(n+1)} \\ \phi(\mathbf{y}) + \beta b^{-(n+1)} + h'b^{-(n+1)} = \phi(\mathbf{z}) + \gamma b^{-(n+1)} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) + (\alpha + k')b^{-(n+1)} = \phi(\mathbf{x}) + kb^{-n} + \beta b^{-(n+1)} \\ \phi(\mathbf{y}) + (\beta + h')b^{-(n+1)} = \phi(\mathbf{y}) + hb^{-n} + \gamma b^{-(n+1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - \beta + k')b^{-(n+1)} = kb^{-n} \\ (\beta - \gamma + h')b^{-(n+1)} = hb^{-n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + k' = kb \\ \beta - \gamma + h' = hb. \end{cases}$$

Sommando membro a membro queste equazioni, si ottiene

$$\alpha - \gamma + k' + h' = (k + h)b.$$

Ora, il membro destro ha valore assoluto pari ad almeno $3b$ (poiché $|k + h| > 2$), mentre il membro sinistro vale al più $|\alpha - \gamma| + |k' + h'|$, che non è maggiore di $2b - 2 + 4 = 2b + 2$ (essendo $|k' + h'| \leq 4$). Quindi, per avere l'uguaglianza, deve essere $3b \leq 2b + 2$ che implica $b \leq 2$, contraddicendo la scelta $b > 2$. □

Si noti che il Teorema 5.4.1 non vale se $b = 2$ come mostrato dal seguente controesempio. La terna (0 0,1 0,1 1) è una V di $\mathcal{R}_2$ (le sequenze rappresentano rispettivamente i valori 0, 1/2, 3/4). Ciò nonostante, la terna (0 0 1,1 0 −1,1 1 −1) è ancora una V di $\mathcal{R}_3$ (i valori sono, in questo caso, 1/8, 3/8, 5/8). È pur vero che la catena rimane transitiva limitata anche nel caso $b = 2$, ma stavolta il tempo di attesa sarà 1:

Teorema 5.4.2 *Se $b = 2$, allora la catena $(\mathcal{R}_n, f_n)_{n\in\omega}$ è transitiva limitata con tempo di attesa globale $\tau^* = 1$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 5.4.1. Si supponga che $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sia una V di (T_n, co_n), $(\mathbf{x}\alpha, \mathbf{y}\beta, \mathbf{z}\gamma) \in V(T_{n+1}, \mathrm{co}_{n+1})$ e $(\mathbf{x}\alpha\alpha', \mathbf{y}\beta\beta', \mathbf{z}\gamma\gamma') \in V(T_{n+2}, \mathrm{co}_{n+2})$. Allora si ha

$$\begin{array}{rcl}
\phi(\mathbf{x}) + kb^{-n} & = & \phi(\mathbf{y}) \\
\phi(\mathbf{y}) + hb^{-n} & = & \phi(\mathbf{z}) \\
\phi(\mathbf{x}\alpha) + k'b^{-(n+1)} & = & \phi(\mathbf{y}\beta) \\
\phi(\mathbf{y}\beta) + h'b^{-(n+1)} & = & \phi(\mathbf{z}\gamma) \\
\phi(\mathbf{x}\alpha\alpha') + k''b^{-(n+2)} & = & \phi(\mathbf{y}\beta\beta') \\
\phi(\mathbf{y}\beta\beta') + h''b^{-(n+2)} & = & \phi(\mathbf{z}\gamma\gamma').
\end{array}$$

per qualche scelta di k, h, k', h', k'', h'' che soddisfi le condizioni. Ciò significa

$$\left\{\begin{array}{l}
\phi(\mathbf{x}) + (\alpha - \beta)b^{-(n+1)} + (\alpha' - \beta' + k'')b^{-(n+2)} = \phi(\mathbf{y}) \\
\phi(\mathbf{y}) + (\beta - \gamma)b^{-(n+1)} + (\beta' - \gamma' + h'')b^{-(n+2)} = \phi(\mathbf{z})
\end{array}\right.$$

che implica

$$\left\{\begin{array}{l}
(\alpha - \beta)b^{-(n+1)} + (\alpha' - \beta' + k'')\beta^{-(n+2)} = kb^{-n} \\
(\beta - \gamma)b^{-(n+1)} + (\beta' - \gamma' + h'')\beta^{-(n+2)} = hb^{-n}.
\end{array}\right.$$

Sommando queste equazioni membro a membro, otteniamo

$$(\alpha - \gamma)b^{-(n+1)} + (\alpha' - \gamma' + k'' + h'')b^{-(n+2)} = (k + h)b^{-n}$$

$$(\alpha - \gamma)b + \alpha' - \gamma' + k'' + h'' = (k + h)b^2$$

$$\alpha' - \gamma' + k'' + h'' = (k + h)b^2 - (\alpha - \gamma)b.$$

Sostituendo $b = 2$

$$\alpha' - \gamma' + k'' + h'' = 4(k + h) - 2(\alpha - \gamma),$$

e un'analisi esaustiva dei casi mostra che questa è una contraddizione. □

Chiaramente, questo non è l'unico modo che possiamo utilizzare per provare che co_∞ è transitiva, e non è nemmeno il più diretto, ma ci dà molta informazione in più, perché ci dice che non solo raggiungiamo la transitività, ma anche che ogni controesempio "locale" alla transitività viene risolto dopo solo un passo (due passi al più, nel caso binario).

Gli stessi risultati valgono per la usuale rappresentazione con cifre positive, anche se la situazione si banalizza in quel caso: risulta, come si vede facilmente, che

- per ogni n, gli elementi di T_n vengono mappati iniettivamente nell'intervallo unitario da ϕ (cioè, a differenza della rappresentazione con cifre negative, non abbiamo sequenze finite multiple con la stessa lunghezza corrispondenti allo stesso numero reale);
- l'intervallo di approssimazione indotto da una sequenza finita $\mathbf{x} \in T_n$ è un intervallo chiuso di lunghezza b^{-n} il cui estremo sinistro è $\phi(\mathbf{x})$; quindi due intervalli di questo tipo si intersecano in al più un punto;
- la precedente osservazione implica che (T_n, co_n) è semplicemente il grafo P_{b^n} (il cammino con b^n nodi), e la proiezione f_n schiaccia semplicemente ogni sottocammino di lunghezza b in un singolo nodo;
- di conseguenza, le sole V di (T_n, co_n) sono quelle terne che corrispondono a tre nodi consecutivi nel cammino, che non possono mai essere immagine di una V al livello successivo; questo significa che il tempo di risoluzione globale in questo caso è $\tau^* = 0$, indipendentemente dalla base usata per la rappresentazione.

Ritorneremo sulle rappresentazioni con cifre negative in seguito, mostrando che è possibile ricostruire completamente l'usuale topologia euclidea dell'intervallo unitario per mezzo di una cocatena di approssimazione costituita da spazi di tolleranza finiti.

5.5 Sequenze di approssimazione e immagini inverse di topologie

Nelle precedenti sezioni abbiamo tentato di convincere il lettore dell'utilità e dell'importanza delle ω-cocatene di spazi di tolleranza per descrivere uno spazio complesso (nell'esempio precedente: l'insieme dei numeri reali) mediante un insieme crescente di spazi (finiti) che lo approssimano. Naturalmente ciò che fino ad ora abbiamo omesso era un modo per ottenere la struttura topologica dell'oggetto limite come limite di topologie sulle approssimazioni. In questa sezione inizieremo a percorrere la strada che ci condurrà alla definizione di una topologia sul limite, usando la nozione di immagine inversa di una topologia.

Per far questo, considereremo spazi di tolleranza sui quali sia definita una topologia, e li chiameremo *spazi di tolleranza topologici*. Quando non sia possibile alcuna ambiguità, se $\mathcal{T}$ è uno spazio di tolleranza topologico, indicheremo con Ω (eventualmente con alcuni indici o pedici) la topologia. D'ora in avanti useremo il termine *sequenza di approssimazione (topologica)* per indicare una ω-cocatena nella categoria **cTolSp** (e l'aggettivo "topologico" verrà aggiunto se ogni spazio di tolleranza è anche topologico).

Per prima cosa, si consideri il seguente risultato, che è una blanda generalizzazione del Theorem I.13.2 di [Gaa64]:

Teorema 5.5.1 *Sia I un insieme di indici e $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una famiglia di funzioni. Si supponga che, per ogni $i \in I$, ci sia una topologia Ω_i definita sull'insieme Y_i. Allora esiste la topologia più debole possibile Ω su X tale che le f_i siano continue (in senso topologico); Ω è generata dalla sottobase*

$$\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(O) : i \in I, O \in \Omega_i\}.$$

Dimostrazione: In primo luogo si osservi che esiste almeno una topologia che soddisfa l'enunciato (la topologia discreta su X). Si noti anche che $\mathcal{S}$ è in effetti una sottobase di una topologia su X; infatti, se $x \in X$, si scelga un qualsiasi $i \in I$ e si consideri $f_i(x)$: questo è un punto di Y_i e naturalmente, preso un qualunque aperto $O \in \Omega_i$ tale che $f_i(x) \in O$, vale che $x \in f_i^{-1}(O)$; quindi, c'è un $S \in \mathcal{S}$ tale che $x \in S$, come richiesto. Sia ora Ω la topologia generata da $\mathcal{S}$: ovviamente, ogni funzione f_i sarà continua rispetto a questa topologia. Inoltre, se Ω' fosse un'altra topologia siffatta, allora si avrebbe $\mathcal{S} \subseteq \Omega'$, e quindi $\Omega \subseteq \Omega'$: questo dimostra la minimalità. □

La topologia Ω del Teorema 5.5.1 è detta *immagine inversa* della famiglia $(\Omega_i)_{i \in I}$ sotto $(f_i)_{i \in I}$. Nel caso speciale $|I| = 1$ il teorema si può riformulare nel seguente modo, più canonico:

Corollario 5.5.1 *Se $f : X \to Y$ è una funzione e Ω è una topologia su Y, allora esiste la topologia più debole $f^{-1}(\Omega)$ su X tale che f risulti continua. In particolare, un insieme sarà aperto in $f^{-1}(\Omega)$ se e solo se è la controimmagine di un aperto di Ω.*

Dimostrazione: Dobbiamo solo mostrare che, in questo caso, l'insieme $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(O) : i \in I, O \in \Omega_i\}$ è in effetti lui stesso una topologia. Chiaramente, $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{S}$ e $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{S}$. Inoltre, presi due insiemi aperti $O_1, O_2 \in \Omega$ vale che $f^{-1}(O_1 \cap O_2) = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2)$. Infine, se $(O_i)_{i \in I}$ è una famiglia di aperti, allora $f^{-1}(\cup_{i \in I} O_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$. □

Il seguente risultato afferma che la tecnica di calcolare le immagini inverse di una topologia trasforma anche i limiti inversi nella categoria **cTolSp** in limiti inversi nella categoria **Top** degli spazi topologici con funzioni continue[5]

Teorema 5.5.2 *Sia $(\mathcal{T}_i, f_i)_{i \in \omega}$ una sequenza di approssimazione topologica. Inoltre, si supponga che $\mathcal{T}_\infty$ sia il limite inverso della sequenza, con proiezioni $\pi_i : \mathcal{T}_\infty \to \mathcal{T}_i$. La topologia Ω_∞ che è l'immagine inversa della famiglia $(\Omega_i)_{i \in \omega}$ rispetto a $(\pi_i)_{i \in \omega}$ rende $\mathcal{T}_\infty$ uno spazio topologico che è anch'esso limite inverso della sequenza di approssimazione considerata come ω-cocatena nella categoria* **Top**.

Dimostrazione: Già sappiamo che $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$, per il Teorema 5.3.1. Ora, supponete che (X, Ω) sia un altro spazio topologico, dotato di una famiglia $\phi_i : X \to X_i$ di funzioni continue tali che $f_i \circ \phi_{i+1} = \phi_i$. Si definisca $h : X \to X_\infty$ ponendo

$$h(x) = \langle \phi_i(x) \rangle_{i \in \omega}.$$

[5]Quando consideriamo spazi di tolleranza topologici, l'uso della parola "continuo" può risultare ambiguo (poiché non specifichiamo se si tratti di continuità topologica o rispetto alla tolleranza). Per risolvere questo problema, aggiungeremo quando necessario un aggettivo accanto alla parola; nonostante ciò, quando non siano possibili confusioni (o quando una funzione è continua *sia* rispetto alla tolleranza *che* rispetto alla topologia) non aggiungeremo ulteriori spiegazioni.

Vale che $\pi_i(h(x)) = (h(x))_i = \phi_i(x)$ e quindi $\pi_i \circ h = \phi_i$, come richiesto. Inoltre, h è continua: infatti, sia Ω' l'immagine inversa della famiglia $(\Omega_i)_{i\in\omega}$ rispetto a $(\phi_i)_{i\in\omega}$: naturalmente $\Omega' \subseteq \Omega$, essendo Ω' la topologia più debole per cui le ϕ_i siano continue. Per dimostrare che h è continua, usando il Lemma A.3.1, dobbiamo solo provare che $h^{-1}(\pi_i^{-1}(O)) \in \Omega$ per tutti gli $i \in \omega$ e gli $O \in \Omega_i$. Ma

$$h^{-1}(\pi_i^{-1}(O)) = \{x \in X : h(x) \in \pi_i^{-1}(O)\} =$$
$$= \{x \in X : \pi_i(h(x)) \in O\} = \{x \in X : \phi_i(x) \in O\} = \phi_i^{-1}(O)$$

e $\phi_i^{-1}(O)$ è un elemento della sottobase standard di Ω', quindi anche $\phi_i^{-1}(O) \in \Omega$. □

In altre parole, data una sequenza di approssimazione topologica $(\mathcal{T}_i, f_i)_{i\in\omega}$, c'è un modo standard di topologizzarne il limite, ottenendo così uno spazio di tolleranza topologico che è effettivamente il limite della corrispondente cocatena sia nella categoria degli spazi di tolleranza che nella categoria degli spazi topologici.

Un caso importante della precedente costruzione si verifica quando tutte le topologie Ω_i siano discrete (cioè $\Omega_i = \wp(X_i)$ per ogni i). In questo caso, diremo che la sequenza è *discretamente topologizzata.*

Proprietà 5.5.1 *Sia $(\mathcal{T}_i, f_i)_{i\in\omega}$ una sequenza di approssimazione discretamente topologizzata. Allora, la topologia limite Ω_∞ ha l'insieme*

$$\mathcal{S}_\infty = \{\pi_i^{-1}(x) : i \in \omega \text{ e } x \in X_i\}$$

come base.

Dimostrazione: Già sappiamo che una base per Ω_∞ è data dall'insieme $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(O) : i \in \omega \text{ e } O \in \Omega_i\}$, e chiaramente $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathcal{S}$. Inoltre ogni aperto $O \in \Omega_i$ è l'unione di singoletti aperti, e $\pi_i^{-1}(O) = \cup_{x\in O}\pi_i^{-1}(x)$. Quindi $\mathcal{S}_\infty$ è in effetti una sottobase di Ω_∞. Ora, per dimostrare che è una base, si supponga che $\mathbf{x} \in \pi_i^{-1}(y) \cap \pi_j^{-1}(z)$ con $i, j \in \omega$, $y \in X_i$ e $z \in X_j$. Questo significa che $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i = y$ e $\pi_j(\mathbf{x}) = x_j = z$; supponete, senza perdita di generalità, che $i \leq j$; allora, essendo $f_i^j(x_j) = x_i$, risulta che $f_i^j(z) = y$. Quindi, se una sequenza infinita appartiene a $\pi_j^{-1}(z)$, deve avere un y nell'i-esima posizione, e perciò deve anche appartenere a $\pi_i^{-1}(y)$. In altri termini, $\pi_j^{-1}(z) \subseteq \pi_i^{-1}(y)$. Così abbiamo che $\mathbf{x} \in \pi_j^{-1}(z) = \pi_j^{-1}(z) \cap \pi_i^{-1}(y)$. □

5.6 Riduzione di spazi di tolleranza e immagini dirette di topologie

In questa sezione, discuteremo brevemente un'altra tecnica ben nota per indurre topologie, e la useremo per definire lo spazio topologico quoziente relativo ad uno spazio di tolleranza ridotto.

Quello che segue, che dualizza Corollario 5.5.1, è un teorema standard di topologia generale:

Teorema 5.6.1 (Gaal [Gaa64], Theorem I.13.3) *Se $f : X \to Y$ è una funzione e Ω è una topologia su X, allora esiste la topologia più forte $f(\Omega)$ su Y tale che f sia continua. In particolare, un insieme è aperto in $f(\Omega)$ se e solo se la sua immagine inversa è aperta in Ω.* $\square$

Usando questo risultato possiamo introdurre la nozione di spazio quoziente. Sia (X, Ω) uno spazio topologico e R una relazione di equivalenza su X; esiste una mappa canonica $\psi_R : X \to X/R$ che manda ogni elemento x di X nella sua classe di equivalenza $[x]_R$. Ora, possiamo considerare $\psi_R(\Omega)$, che è la topologia più forte su X/R per cui ψ_R risulti continua. Lo spazio topologico $(X/R, \psi_R(\Omega))$ è chiamato lo *spazio quoziente* di (X, Ω) rispetto a R, e la topologia $\psi_R(\Omega)$ viene usualmente denotata da Ω/R.

La nozione di spazio quoziente è molto utile, e corrisponde al processo di "identificare" alcuni punti in uno spazio topologico. Per esempio, se si considera l'intervallo unitario [0,1] (come sottospazio di $\mathbb{R}$, con la topologia euclidea), e si identificano 0 e 1 (cioè, si prende la minima relazione di equivalenza R su $[0,1]$ per cui $0\,R\,1$), lo spazio quoziente ottenuto è il (omeomorfo al) cerchio S^1.

Applicheremo i concetti sopra introdotti al caso speciale degli spazi di tolleranza ridotti. Sia $\mathcal{T}$ uno spazio di tolleranza; per ogni $x \in X$, si definisca $\mathrm{co}(x) = \{y \in X : x \,\mathrm{co}\, y\}$, e si ponga

$$x \approx y \text{ se e solo se } \mathrm{co}(x) = \mathrm{co}(y).$$

Risulta che

Lemma 5.6.1 *La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza; inoltre, se $x \approx x'$ e $y \approx y'$ allora*

$$x \,\mathit{co}\, y \iff x' \,\mathit{co}\, y'.$$

Dimostrazione: È chiaro che $\approx$ è una relazione di equivalenza. Ora $x \approx x'$ significa precisamente che, per tutti gli z, $x \,\mathrm{co}\, z \iff x' \,\mathrm{co}\, z$. Da ciò abbiamo $x \,\mathrm{co}\, y \iff x' \,\mathrm{co}\, y \iff x' \,\mathrm{co}\, y'$. $\square$

Quindi, possiamo definire un nuovo spazio di tolleranza $\mathcal{T}^*$, il cui insieme soggiacente è $X/\approx$ e che ha una relazione di tolleranza co^* descritta ponendo $[x]\ \mathrm{co}^*\ [y]$ se e solo se $x \,\mathrm{co}\, y$ (la definizione è ben data, in virtù del Lemma 5.6.1). Lo spazio $\mathcal{T}^*$ è chiamato la *riduzione* di $\mathcal{T}$, e diciamo che $\mathcal{T}$ è *ridotto* se e solo se è isomorfo alla sua riduzione, cioè $\mathcal{T} \cong \mathcal{T}^*$. Ovviamente:

Proprietà 5.6.1 *Le seguenti proprietà di uno spazio di tolleranza $\mathcal{T}$ sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{T}$ è transitivo;*
2. *$\mathcal{T}^*$ è totalmente disconnesso.* $\square$

Ora, se abbiamo uno spazio di tolleranza topologico $\mathcal{T}$, possiamo considerare la topologia quoziente $\Omega^* = \Omega/\approx$ sulla riduzione $\mathcal{T}^*$: la topologia così ottenuta viene spesso chiamata la *topologia ridotta* (e lo spazio corrispondente è chiamato lo "spazio di tolleranza (topologico) ridotto").

Il seguente risultato si rivelerà molto utile nel prosieguo:

Teorema 5.6.2 *Sia $\mathcal{T} = (X, co, \Omega)$ uno spazio di tolleranza topologico, e (Y, Ω') un altro spazio topologico. Si supponga che $f : X \to Y$ sia una funzione tale che:*

1. *f è una funzione continua e suriettiva;*
2. *per ogni $x, y \in X$ vale che $x \approx y$ se e solo se $f(x) = f(y)$.*

Allora, c'è una biiezione continua $h : (X^*, \Omega^*) \to (Y, \Omega')$; inoltre, se f è aperta, allora h è un omeomorfismo.

Dimostrazione: Si definisca la funzione $h : X^* \to Y$ ponendo $h([x]_\approx) = f(x)$. Questa è ben definita, poiché $x \approx y$ implica $f(x) = f(y)$. Inoltre, h è iniettiva (perché $f(x) = f(y)$ implica $x \approx y$), e suriettiva (poiché f lo è). Ora, sia $\psi : X \to X^*$ la mappa canonica $x \mapsto [x]_\approx$. Si ricordi che (Teorema 5.6.1) $O \in \Omega^*$ se e solo se $\psi^{-1}(O) \in \Omega$. Si supponga $O \in \Omega'$: $h^{-1}(O)$ è aperto se e solo se $\psi^{-1}(h^{-1}(O))$ è aperto, che è equivalente a dire che $\{x \in X : f(x) \in O\} = f^{-1}(O)$ è aperto. Ma f è continua, perciò concludiamo che h è anch'essa continua. Per la continuità dell'inversa (nel caso che f sia aperta), supponiamo che O sia aperto in Ω^*, cioè che $\psi^{-1}(O) \in \Omega$. Ora $f(\psi^{-1}(O)) = f(O)$ che è aperto, perché f è una mappa aperta. $\square$

Come ultima osservazione, si noti che, nell'enunciato del Teorema 5.6.2, si può sostituire $x \approx y$ con $x \,\mathrm{co}\, y$ ogni volta che $\mathcal{T}$ sia transitivo (perché in questo caso $\approx$ coincide con co).

5.7 Approssimazione dell'insieme di Cantor

In questa sezione applicheremo le tecniche sviluppate per topologizzare i limiti di sequenze di approssimazione al caso delle rappresentazioni con cifre positive dei numeri reali nell'intervallo unitario. In particolare, mostreremo che la topologia limite ridotta è connessa con la topologia euclidea usuale di $[0,1]$, quando si prendano topologie discrete sulla sequenza di approssimazione: più precisamente, otterremo uno spazio che è omeomorfo all'insieme di Cantor standard.

Introduciamo prima un po' di notazione, che è simile a quella usata per le rappresentazioni con cifre negative, con la sola differenza che qui rappresenteremo (approssimazioni a) numeri reali mediante sequenze (finite) di bit senza segno. Per ogni $n \in \omega$, usiamo R_n per indicare l'insieme $\{0,1\}^n$, e usiamo R_∞ per $\{0,1\}^\omega$ (l'insieme delle sequenze binarie infinite). Inoltre, al solito, usiamo $\preceq$ per indicare la relazione di prefisso sull'insieme $\{0,1\}^\infty$ delle sequenze binarie (finite ed infinite). Per semplicità, assumiamo che gli indici corrispondenti ad ogni sequenza partano da 1.

Definiamo una funzione:

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \{0,1\}^\infty & \to & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \frac{x_i}{2^i}. \end{array}$$

che mappa ogni sequenza in un numero reale. Risulta che:

Proprietà 5.7.1 *Per ogni $\mathbf{x} \in \{0,1\}^\omega$ si ha $\varphi(\mathbf{x}) \in [0,1]$. Inoltre, per ogni $\alpha \in [0,1]$ esiste una sequenza infinita $\mathbf{x} \in \{0,1\}^\omega$ tale che $\varphi(\mathbf{x}) = \alpha$.*

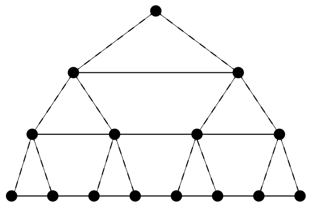


Figura 5.5: I primi livelli della sequenza di approssimazione $(\mathcal{R}_n, f_n)_{n\in\omega}$

Dimostrazione: Simile al Lemma 5.4.1. □

Ora, per ogni $n \in \omega$ si può definire una relazione di tolleranza co_n^R su R_n, ponendo

$$\mathbf{x}\ \mathrm{co}_n^R\ \mathbf{y} \text{ se e solo se } |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leq 2^{-n}.$$

Lo spazio di tolleranza $\mathcal{R}_n = (R_n, \mathrm{co}_n^R)$, visto come grafo non orientato, è semplicemente un cammino di 2^n vertici. Inoltre, definiamo, per ogni $n \in \omega$, una funzione $f_n : R_{n+1} \to R_n$ come segue

$$f_n(x_1 x_2 \dots x_{n+1}) = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Si noti che

Lemma 5.7.1 *La funzione $f_n : \mathcal{R}_{n+1} \to \mathcal{R}_n$ è continua (rispetto alla tolleranza).*

Dimostrazione: Si supponga che $\mathbf{x}\ \mathrm{co}_{n+1}^R\ \mathbf{y}$; allora:

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_n(\mathbf{x})) - \varphi(f_n(\mathbf{y}))| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{2^i}\right| = \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i} - \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{2^i} + \frac{y_{n+1}}{2^{n+1}}\right| = \left|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) + \frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{2^{n+1}}\right| \leq \\
&\leq |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

e quindi $f_n(\mathbf{x})\ \mathrm{co}_n^R\ f_n(\mathbf{y})$. □

Fig. 5.5 mostra i primi quattro spazi di tolleranza della sequenza di approssimazione: le linee tratteggiate danno le funzioni f_n.

Con lo stesso argomento usato per le rappresentazioni con cifre negative, si dimostra che il limite inverso della sequenza di approssimazione $(\mathcal{R}_n, f_n)$ è (a meno di isomorfismi) R_∞, con proiezioni $\pi_i : R_\infty \to R_i$ definite ponendo $\pi_i(\mathbf{x})$ uguale al prefisso di lunghezza i della sequenza $\mathbf{x}$. Invece di usare la nozione di tempo di risoluzione, proviamo direttamente che la sequenza ha limite transitivo, dimostrando in primo luogo che

Lemma 5.7.2 *Per ogni coppia di sequenze distinte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_\infty$ le seguenti asserzioni risultano equivalenti:*

1. *esiste una qualche sequenza finita $\mathbf{z}$ tale che $\mathbf{x} = \mathbf{z}1\mathbf{0}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{z}0\mathbf{1}$ (o viceversa), dove $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ denotano la sequenza di infiniti zeri e uni, rispettivamente;*

2. *la relazione* $\mathbf{x}\, \mathrm{co}_\infty^R\, \mathbf{y}$ *vale;*

3. *vale che* $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$.

Dimostrazione: (1) $\implies$ *(2).* Sia $k = |\mathbf{z}|$; mostreremo che, per ogni i, $\pi_i(\mathbf{x})\ \mathrm{co}_i^R\ \pi_i(\mathbf{y})$, distinguendo due casi. Se $i \leq k$, allora $\pi_i(\mathbf{x})$ e $\pi_i(\mathbf{y})$ coincidono (essendo entrambi prefissi di lunghezza i della sequenza $\mathbf{z}$). Se $i > k$, allora

$$|\varphi(\pi_i(\mathbf{x})) - \varphi(\pi_i(\mathbf{y}))| = \left|\varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}} - \varphi(\mathbf{z}) - \sum_{n=k+2}^{i} \frac{1}{2^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{n=0}^{i-(k+2)} \frac{1}{2^i}\right| = \left|\frac{1}{2^{k+1}}(1 - 1 + \frac{1}{2^{i-(k+2)+1}})\right| = \frac{1}{2^i}$$

cosicché $\pi_i(\mathbf{x})\ \mathrm{co}_i^R\ \pi_i(\mathbf{y})$, e quindi $\mathbf{x}\ \mathrm{co}_\infty^R\ \mathbf{y}$.
(2) $\implies$ *(3).* È sufficiente osservare che $|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|$ vale al più, per ogni i, $|\varphi(\pi_i(\mathbf{x})) - \varphi(\pi_i(\mathbf{y}))| + \sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n}$ che è al massimo (usando l'ipotesi) $2/2^i = 1/2^{i-1}$. Poiché questo è vero per ogni i, si ottiene il risultato.
(3) $\implies$ *(1).* Sia $\mathbf{z}$ il più lungo prefisso comune di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (deve essere finito, poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$). Si supponga, senza perdita di generalità, che $\mathbf{x} = \mathbf{z}1\mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{z}0\mathbf{w}$. Ora, se $k = |\mathbf{z}|$, risulta:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{\varphi(\mathbf{v})}{2^{k+1}} \\ \varphi(\mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{z}) + \frac{\varphi(\mathbf{w})}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Essendo $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$ si avrà $1 + \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w})$. Ora poiché $\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w}) \in [0, 1]$, deve essere $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ e $\varphi(\mathbf{w}) = 1$. Le sole sequenze con valori 0 e 1 sono rispettivamente $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$. □

Quindi, la relazione co_∞^R è transitiva, ed inoltre coincide con la relazione di equivalenza indotta dalle fibre[6] di ϕ.
Si noti che

Corollario 5.7.1 *Ogni classe di equivalenza di* co_∞^R *contiene uno o due elementi. Inoltre, una classe di equivalenza contiene due elementi se e solo se è mappata (da* φ*) in un razionale diadico diverso da* 0 *e* 1.

Dimostrazione: La prima parte dell'enunciato segue direttamente dall'implicazione (1) $\iff$ (2) del Lemma 5.7.2. Dobbiamo solo provare che $\varphi(\mathbf{x})$ è un razionale diadico (diverso da 0 e 1) se e solo se $\mathbf{x}$ ha la forma $\mathbf{x} = \mathbf{z}1\mathbf{0}$, che è banalmente verificato svolgendo i calcoli. □

Siamo perciò pronti a dimostrare il teorema principale di questa sezione, concludendo che la topologia indotta per immagine inversa su $\mathcal{R}_\infty$ è effettivamente (omeomorfa a) quella dell'insieme di Cantor. Prima di farlo, abbiamo bisogno di un lemma tecnico:

[6] Ogni funzione $f : A \to B$ induce una relazione di equivalenza $\approx_f$ sull'insieme A, ponendo $x \approx_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$.

Lemma 5.7.3 *Sia $\mathcal{B}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della forma (a,b) dove a,b sono razionali diadici. Allora, $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione: È chiaro che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia Ω. Sia $\mathcal{B}'$ la famiglia degli intervalli aperti (che è una base per la topologia usuale Ω'): dobbiamo dimostrare che $\Omega = \Omega'$. Essendo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, risulta che Ω' è più forte di Ω (usando l'osservazione fatta dopo il Teorema A.3.1). Ora dimostriamo, usando ancora il Teorema A.3.1, che Ω è più forte di Ω'. Sia (a,b) un intervallo, e $a < x < b$: siccome i razionali diadici sono densi nei reali, ci saranno due razionali diadici a', b' tali che $a < a' < x < b' < b$, e questo conclude la dimostrazione. □

Dimostriamo ora il teorema:

Teorema 5.7.1 *Si consideri una sequenza di approssimazione $(\mathcal{R}_i, f_i)_{i\in\omega}$ discretamente topologizzata. Allora, esiste una biiezione continua dal suo limite ridotto $(R^*_\infty, \Omega^*_\infty)$ all'intervallo unitario (con la topologia usuale).*

Dimostrazione: Si consideri la funzione $\varphi : R_\infty \to [0,1]$: questa è una mappa suriettiva (per la Proprietà 5.7.1), e inoltre soddisfa l'assunzione (2) del Teorema 5.6.2 (in virtù dell'osservazione fatta dopo il Lemma 5.7.2). Quindi, per usare il Teorema 5.6.2, dobbiamo solo provare che φ è continua.

Continuità. Per il Lemma 5.7.3, una sottobase per la topologia su $[0,1]$ è data dalla famiglia di tutti gli intervalli della forma $[0,\alpha)$ o $(\alpha,1]$, dove $0 < \alpha < 1$ e α sia un numero diadico. Usando il Lemma A.3.1, per provare la continuità dobbiamo solo dimostrare che la controimmagine rispetto a φ di ogni intervallo di questo tipo è aperta (nella topologia limite). Lo facciamo solo per intervalli della forma $[0,\alpha)$. Sappiamo già che α possiede una rappresentazione della forma $\mathbf{x} = \mathbf{z01}$, con $k = |z|$ (e $\alpha = \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}}$). Ora, sia $A = \{\mathbf{w} \in R_k : \varphi(\mathbf{w}) < \varphi(\mathbf{z})\}$, e si ponga

$$X = \Big(\bigcup_{\mathbf{w}\in A} \pi_k^{-1}(\mathbf{w})\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in\omega} \pi_{k+i+2}^{-1}(\mathbf{z}01^i0)\Big)$$

dove 1^i indichi la sequenza di i uni. Questo è un sottoinsieme aperto di R_∞ (è un'unione di elementi della sottobase, come spiegato nel Lemma 5.5.1). Dimostreremo che $\varphi^{-1}([0,\alpha)) = X$, provando così la continuità.

Sia $\mathbf{y} \in X$; abbiamo due casi. Se $\mathbf{y} = \mathbf{wv}$, con $\mathbf{w} \in A$, allora

$$\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{w}) + \frac{\varphi(\mathbf{v})}{2^k} \leq \varphi(\mathbf{w}) + \frac{1}{2^k}$$

ed, essendo $\mathbf{w} \in A$, $\varphi(\mathbf{w}) < \varphi(\mathbf{z})$, cioè $\varphi(\mathbf{w}) \leq \varphi(\mathbf{z}) - \frac{1}{2^k}$; quindi $\varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{z}) < \alpha$. Altrimenti, vale che $\mathbf{y} = \mathbf{z}01^i0\mathbf{v}$, il cui valore è

$$\varphi(\mathbf{y}) < \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

essendo $1^i0\mathbf{v}$ una sequenza che *deve* contenere uno 0 da qualche parte.

Per il viceversa, si supponga che $\beta \in [0,\alpha)$, e sia $\mathbf{y}$ una rappresentazione di β (cioè $\varphi(\mathbf{y}) = \beta$). Dimostreremo che $\mathbf{y} \in X$. Infatti, si consideri la scomposizione di $\mathbf{y}$ come $\mathbf{y} = \pi_k(\mathbf{y})\mathbf{v}$; si hanno tre casi:

- se $\varphi(\pi_k(\mathbf{y})) < \varphi(\mathbf{z})$ allora $\pi_k(\mathbf{y}) \in A$ e quindi $\mathbf{y} \in X$;
- se $\varphi(\pi_k(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{z})$ allora $\pi_k(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$ (poiché la funzione φ è iniettiva quando ristretta a ciascun livello finito); inoltre, $\mathbf{v}$ non può iniziare con un 1, altrimenti il valore di $\mathbf{y}$ sarebbe almeno $\varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}} = \alpha$. Infine $\mathbf{v}$ non può avere la forma $\mathbf{v} = \mathbf{01}$, perché altrimenti avremmo lo stesso problema di prima; quindi necessariamente $\mathbf{y} \in X$;
- il caso $\varphi(\pi_k(\mathbf{y})) > \varphi(\mathbf{z})$ è impossibile, perché questo significherebbe $\varphi(\pi_k(\mathbf{y})) - \frac{1}{2^k} \geq \varphi(\mathbf{z})$; quindi avremmo $\beta = \varphi(\pi_k(\mathbf{y})) + \frac{\varphi(\mathbf{v})}{2^k} \geq \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^k} + \frac{\varphi(\mathbf{v})}{2^k}$, che a sua volta è uguale a $\alpha - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1+\varphi(\mathbf{v})}{2^k}$. Ma ora $\beta < \alpha$ implica $\alpha - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1+\varphi(\mathbf{v})}{2^k} < \alpha$, cioè $\varphi(\mathbf{v}) < -\frac{1}{2}$: una contraddizione! $\square$

Si noti che in questo caso *non* abbiamo un omeomorfismo, perché la funzione φ non è aperta. Infatti, dimostreremo fra un istante che lo spazio limite che abbiamo costruito è effettivamente omeomorfo all'insieme di Cantor classico.

L'*insieme di Cantor* è l'insieme C di tutti i numeri reali che possono essere scritti come $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i}{3^i}$, dove $\epsilon_i \in \{0, 2\}$ per ogni $i > 0$; essendo $C \subseteq [0, 1]$, possiamo considerarlo un sottospazio dell'usuale spazio euclideo su $\mathbb{R}$.

Teorema 5.7.2 *Lo spazio $(R_\infty, \Omega_\infty)$ è omeomorfo all'insieme di Cantor.*

Dimostrazione: Si definisca la funzione $\rho : R_\omega \to C$ ponendo

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \frac{2x_i}{3^i}.$$

Tale funzione è chiaramente ben definita (cioè per ogni $\mathbf{x}$ si ha $\rho(\mathbf{x}) \in C$) e la sua restrizione a R_∞ è suriettiva. La funzione è anche iniettiva sullo stesso insieme; infatti, supponete che $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{y})$, cioè $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i}$. Procedendo per induzione su i, dimostriamo che $x_i = y_i$:

- si supponga, per assurdo, che $x_i = 0$ e $y_i = 1$ (l'altro caso si dimostra in modo analogo): allora $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3^i}$ che è uguale a $\frac{1}{9}\frac{3}{2} = \frac{1}{6}$. Viceversa, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} \geq \frac{1}{3}$, che contraddice $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{y})$;
- il passo induttivo si dimostra in modo del tutto simile.

La dimostrazione che ρ sia continua è simile a quella data nel Teorema 5.7.1 per φ, e quindi la omettiamo. Dimostriamo che $\rho^{-1} : C \to R_\infty$ è continua; supponiamo che $O \subseteq C$ sia aperto (cioè, per ogni $x \in O$ esiste $\epsilon_x > 0$ tale che, per ogni $y \in C$, se $|x - y| < \epsilon_x$ allora $y \in O$). Dimostriamo che $\rho^{-1}(O)$ è aperto. Sia $\mathbf{x} \in \rho^{-1}(O)$, e si prenda n abbastanza grande da avere $3^{-n} < \epsilon_{\rho(\mathbf{x})}$. Se $\mathbf{y} \in \pi_n^{-1}(\pi_n(\mathbf{x}))$ allora $\mathbf{y} = \pi_n(\mathbf{x})\mathbf{y}'$ e $\mathbf{x} = \pi_n(\mathbf{x})\mathbf{x}'$. Quindi:

$$|\rho(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{y})| = \frac{|\rho(\mathbf{x}') - \rho(\mathbf{y}')|}{3^n} < \epsilon_{\rho(\mathbf{x})} |\rho(\mathbf{x}') - \rho(\mathbf{y}')| < \epsilon_{\rho(\mathbf{x})}$$

e perciò, essendo O aperto, $\rho(\mathbf{y}) \in O$, cioè $\mathbf{y} \in \rho^{-1}(O)$. Ma questo è vero per ogni $\mathbf{y}$, e quindi

$$\forall \mathbf{x} \in \rho^{-1}(O) \exists n \in \omega.\ \pi_n^{-1}(\pi_n(\mathbf{x}))$$

da cui risulta che $\rho^{-1}(O)$ è aperto. $\square$

Notate che, come conseguenza, si ottiene il seguente risultato standard, che è anche dimostrato, in modo diverso, da Gaal [Gaa64] (Lemma IV.9.3):

Corollario 5.7.2 *L'intervallo unitario è un'immagine continua dell'insieme di Cantor.*

Dimostrazione: Questo risultato si ottiene combinando quelli dei Teoremi 5.7.1 e 5.7.2. Infatti, sia ρ l'omeomorfismo costruito nel Teorema 5.7.2, h la biiezione continua del Teorema 5.7.1 e ψ l'iniezione naturale di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}^*$ (che è continua per la definizione stessa di spazio ridotto). Allora, la funzione $h \circ \psi \circ \rho^{-1}$ è continua (essendo composizione di funzioni continue) e suriettiva (perché tutte le funzioni lo sono). Si noti che ψ non è iniettiva, e quindi la composizione non sarà una biiezione. $\square$

5.8 Approssimazione dell'intervallo unitario

In questa sezione, torneremo alla rappresentazione con cifre negative per i numeri reali discussa nella Sezione 5.4, e studieremo in dettaglio la struttura dello spazio limite, dimostrando che la topologia indotta nel modo usuale è effettivamente omeomorfa all'intervallo unitario. Per semplicità, ci limiteremo al caso della 2-NDR, e quindi porremo $\Sigma = \{\overline{1}, 0, 1\}$, dove $\overline{1}$ abbrevia -1. La funzione ϕ, e gli spazi di tolleranza $\mathcal{R}_n = (T_n, \mathrm{co}_n)$, sono definiti come nella Sezione 5.4, scegliendo $b = 2$.

Stavolta, il limite inverso $\mathcal{R}_\infty = (T_\infty, \mathrm{co}_\infty)$ è definito prendendo $T_\infty = \Sigma^\omega$, con proiezioni $\pi_k : \mathcal{R}_\infty \to \mathcal{R}_k$ date da

$$\pi_k(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_k$$

e relazione di tolleranza sul limite definita da

$$\mathbf{x} \, \mathrm{co}_\infty \, \mathbf{y} \text{ se e solo se } \forall k \in \omega . \pi_k(\mathbf{x}) \, \mathrm{co}_k \, \pi_k(\mathbf{y}).$$

Abbiamo già dimostrato (Teorema 5.4.2) che co_∞ è una relazione di equivalenza, usando la tecnica delle terne intransitive. Ora otterremo lo stesso risultato in modo diretto, provando che co_∞ è effettivamente la relazione di equivalenza indotta dalle fibre di ϕ.

Lemma 5.8.1 *Per tutti gli* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_\infty$*, si ha che* $\mathbf{x} \, \mathrm{co}_\infty \, \mathbf{y}$ *se e solo se* $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$.

Dimostrazione: Si supponga che $\mathbf{x} \, \mathrm{co}_\infty \, \mathbf{y}$: allora, per ogni $k \in \omega$ risulta $\pi_k(\mathbf{x}) \, \mathrm{co}_k \, \pi_k(\mathbf{y})$. Perciò $|\phi(\pi_k(\mathbf{x})) - \phi(\pi_k(\mathbf{y}))| \leq 2b^{-k}$ e quindi, se si decompone $\mathbf{x} = \pi_k(\mathbf{x})\mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = \pi_k(\mathbf{y})\mathbf{w}$, si ottiene

$$\begin{aligned} |\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})| &= |\phi(\pi_k(\mathbf{x})) + \phi(\mathbf{v})b^{-k} - \phi(\pi_k(\mathbf{y})) - \phi(\mathbf{w})b^{-k}| \leq \\ &\leq |\phi(\pi_k(\mathbf{x})) - \phi(\pi_k(\mathbf{y}))| + |\phi(\mathbf{v})b^{-k} - \phi(\mathbf{w})b^{-k}| \leq 2b^{-k} + 2b^{-k} = 4b^{-k} \end{aligned}$$

e questo è vero per ogni k, quindi $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$.
Per il viceversa, si supponga che $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$. Allora, usando la stessa decomposizione per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, si ottiene che, per ogni $k \in \omega$:

$$\begin{aligned} |\phi(\pi_k(\mathbf{x})) - \phi(\pi_k(\mathbf{y}))| &= |\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{v})b^{-k} - \phi(\mathbf{y}) + \phi(\mathbf{w})b^{-k}| = \\ &= b^{-k}|\phi(\mathbf{w}) - \phi(\mathbf{v})| \leq 2b^{-k} \end{aligned}$$

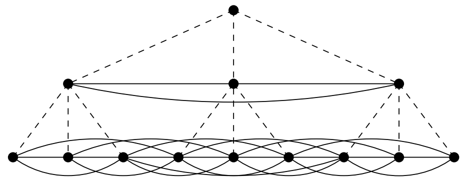


Figura 5.6: La sequenza di approssimazione $(\mathcal{R}_n, f_n)$ $(n = 0, 1, 2)$

e quindi $\pi_k(\mathbf{x}) \operatorname{co}_k \pi_k(\mathbf{y})$ vale per tutti i $k \in \omega$. $\square$

Così , ϕ stabilisce una corrispondenza uno-a-uno fra le classi di equivalenza di $\mathcal{R}_\infty$ (cioè gli elementi di $\mathcal{R}^*_\infty$) e i punti di $[-1, 1]$. Si noti che, in generale, ogni classe di equivalenza può contenere infiniti punti (a differenza del caso delle rappresentazioni con cifre positive, dove ogni classe contiene al più due elementi, come mostrato nel Corollario 5.7.1). La ragione è che, in questo caso, la struttura di ogni livello è molto più complessa di prima, a causa del fatto che l'intersezione fra intervalli può essere non banale (di misura diversa da zero), ed inoltre lo stesso intervallo può avere più di una rappresentazione su ciascun livello. Per esempio, le due sequenze $\overline{1}1$ e $0\overline{1}$ sono entrambe mappate da ϕ nello stesso numero reale $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, e quindi i punti corrispondenti sono equivalenti nello spazio $\mathcal{R}_2$. Detto altrimenti, gli spazi di tolleranza $\mathcal{R}_n$ *non* sono ridotti. In Fig. 5.6, presentiamo i primi tre livelli della sequenza di approssimazione, con le stesse convenzioni di prima (le linee tratteggiate rappresentano le funzioni di troncamento f_i).

Com'è facile vedere, gli spazi di tolleranza nella sequenza di approssimazione tendono ad avere una struttura che diventa esponenzialmente sempre più complicata; al fine di avere una miglior comprensione di ciò che sta realmente succedendo, presentiamo in Fig. 5.7 la versione "per intervalli" di $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Per ogni spazio di tolleranza, abbiamo rappresentato ogni sequenza $\mathbf{x} \in T_i$ $(i = 0, 1, 2)$ mediante l'intervallo che rappresenta $[\phi(\mathbf{x}) - b^{-i}, \phi(\mathbf{x}) + b^{-i}]$. La sovrapposizione di intervalli dà luogo alla presenza di un arco nello spazio di tolleranza.

Siamo a questo punto pronti per dimostrare il teorema principale di questa sezione:

Teorema 5.8.1 *Si consideri la sequenza di approssimazione* $(\mathcal{R}_n, f_n)_{n\in\omega}$*, dove ogni spazio sia discretamente topologizzato. Allora, il limite ridotto* $(\mathcal{R}^*_\infty, \Omega^*_\infty)$ *è omeomorfo all'intervallo unitario* $[0, 1]$.

Dimostrazione: Faremo uso del Teorema 5.6.2, dimostrando che $\phi : T_\infty \to [-1, 1]$ è una funzione continua suriettiva e aperta che soddisfa il vincolo (2) del Teorema 5.6.2. La funzione ϕ è suriettiva, per il Lemma 5.4.1, e soddisfa il vincolo, per il Lemma 5.8.1. Ci rimane solo da dimostrare che è continua ed aperta.

Continuità. Già sappiamo che una sottobase di $[-1, 1]$ è data dalla famiglia di intervalli della forma $[-1, \alpha)$ o $(\alpha, 1]$, con $-1 < \alpha < 1$ diadico (si veda il Lemma 5.7.3). Quindi, per dimostrare che ϕ è continua, usando il Lemma A.3.1, dobbiamo solo controllare che la controimmagine di ognuno di questi intervalli è un aperto: lo facciamo solo per il caso $[-1, \alpha)$. Essendo α un razionale diadico, si avrà una rappresentazione[7] della forma

[7]Per essere più precisi, questo non succede nel caso $\alpha = 0$; ma si può fare a meno di considerare

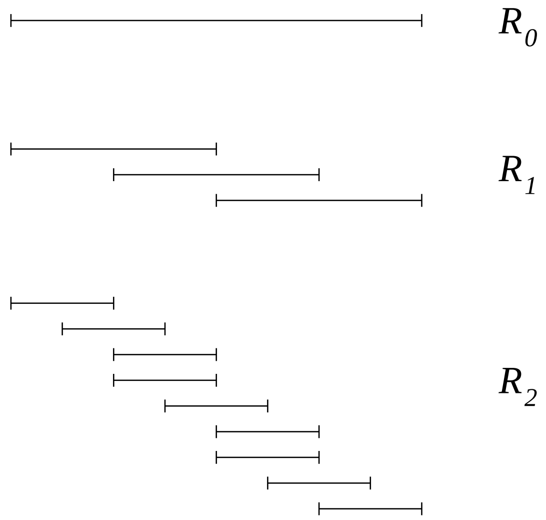


Figura 5.7: Una rappresentazione "per intervalli" della sequenza di approssimazione

$\mathbf{x} = \mathbf{z01}$, con $k = |\mathbf{z}|$ (e $\alpha = \phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}}$). Ora, sia

$$A = \{\mathbf{w} \in T_k : \phi(\mathbf{w}) < \phi(\mathbf{z})\}$$

e, per ogni $i \in \omega$,

$$B_i = \{\mathbf{w} \in T_{k+i+2} : \phi(\mathbf{w}) \leq \phi(\mathbf{z}01^i0)\}.$$

Definiamo

$$X = \left(\cup_{\mathbf{w}\in A}\pi_k^{-1}(\mathbf{w})\right) \cup \left(\cup_{i\in\omega} \cup_{\mathbf{w}\in B_i} \pi_{k+i+2}^{-1}(\mathbf{w})\right),$$

che è un sottoinsieme aperto di T_∞, poiché è un'unione di elementi della sottobase $\mathcal{S}_\infty$ (si veda la Proprietà 5.5.1). Dimostreremo che $\phi^{-1}([-1, \alpha)) = X$.

Per l'inclusione da destra a sinistra, sia $\mathbf{y} \in X$; si hanno due casi:

1. Se $\mathbf{y} = \mathbf{wv}$ con $\mathbf{w} \in A$ allora $\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{w}) + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^k} \leq \phi(\mathbf{w}) + \frac{1}{2^k}$; ma $\phi(\mathbf{w}) < \phi(\mathbf{z})$, cioè $\phi(\mathbf{w}) \leq \phi(\mathbf{z}) - \frac{1}{2^k}$; così $\phi(\mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{z}) < \alpha$, e quindi infine $\phi(\mathbf{y}) \in [-1, \alpha)$, che implica $\mathbf{y} \in \phi^{-1}([-1, \alpha))$.

questo caso, osservando che gli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ possono essere ottenuti come $\cup_{k>0}[-1, -2^{-k})$ e $\cup_{k>0}(2^{-k}, 1]$, rispettivamente.

2. Supponete che esista un $i \in \omega$ tale che $\mathbf{y} = \mathbf{wv}$ per qualche $\mathbf{w} \in B_i$. Allora, si ha:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{w}) + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} \leq \phi(\mathbf{z}01^i0) + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} = \\
= \phi(\mathbf{z}) + \sum_{j=k+2}^{k+i+1} \frac{1}{2^j} + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} = \phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2^j} + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} = \\
= \phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+2}} \frac{1-\frac{1}{2^i}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} = \phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+1}} \frac{2^i - 1}{2^i} + \frac{\phi(\mathbf{v})}{2^{k+i+2}} \leq \\
= \phi(\mathbf{z}) + \frac{2^i-1}{2^{k+i+1}} + \frac{1}{2^{k+i+2}} = \phi(\mathbf{z}) + \frac{2^{i+1}-1}{2^{k+i+2}} = \alpha - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2^{i+1}-1}{2^{k+i+2}} = \\
= \alpha + \frac{2^{i+1} - 2^{i+1} - 1}{2^{k+i+2}} = \alpha - \frac{1}{2^{k+i+2}} < \alpha
\end{aligned}$$

così $\phi(\mathbf{y}) \in [-1, \alpha)$, cioè $\mathbf{y} \in \phi^{-1}([-1, \alpha))$.

Per l'altro verso, si supponga che $\phi(\mathbf{y}) = \beta \in [-1, \alpha)$. Dimostriamo che $\mathbf{y} \in X$. Si decomponga $\mathbf{y}$ come $\mathbf{y} = \pi_k(\mathbf{y})\mathbf{v}$; si hanno due casi:

1. Se $\phi(\pi_k(\mathbf{y})) < \phi(\mathbf{z})$ allora $\pi_k(\mathbf{y}) \in A$ e quindi $\mathbf{y} \in X$.

2. Se $\phi(\pi_k(\mathbf{y})) \geq \phi(\mathbf{z})$, si supponga, per assurdo, che non ci sia alcun prefisso di $\mathbf{y}$ (più lungo di $k+1$) che appartenga a $\cup_{i \in \omega} B_i$. Questo significherebbe che, per tutti gli $i \in \omega$,

$$\begin{aligned}
\phi(\pi_{k+i+2}(\mathbf{y})) > \phi(\mathbf{z}01^i0) = \phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2^j} = \\
= \alpha - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2^i - 1}{2^{k+i+1}} = \alpha + \frac{2^i - 2^i - 1}{2^{k+i+1}} = \alpha - \frac{1}{2^{k+i+1}}.
\end{aligned}$$

Ma $\phi(\mathbf{y}) \geq \phi(\pi_{k+i+2}(\mathbf{y})) - \frac{1}{2^{k+i+2}}$ e quindi, usando la disuguaglianza precedente,

$$\phi(\mathbf{y}) > \alpha - \frac{1}{2^{k+i+1}} - \frac{1}{2^{k+i+2}} = \alpha - \frac{3}{2^{k+i+2}}$$

per ogni $i \in \omega$. Ciò significa che $\beta = \phi(\mathbf{y}) \geq \alpha$, contraddicendo l'ipotesi.

Apertura. Per dimostrare che ϕ è aperta, sia $X \subseteq T_\infty$ un insieme aperto, e $\alpha \in \phi(X)$. Ciò significa che c'è qualche $\mathbf{x} \in X$ tale che $\alpha = \phi(\mathbf{x})$. Essendo X aperto, ci devono essere un $k \in \omega$ e un $\mathbf{v} \in T_k$ tali che $\mathbf{x} \in \pi_k^{-1}(\mathbf{v}) \subseteq X$. Ma $\alpha = \phi(\mathbf{x}) \in \phi(\pi_k^{-1}(\mathbf{v})) = [\phi(\mathbf{v}) - 2^{-k}, \phi(\mathbf{v}) + 2^{-k}] \subseteq \phi(X)$, quindi c'è un'intera sfera aperta che include α completamente contenuta in $\phi(X)$. Dunque $\phi(X)$ è un sottoinsieme aperto di $[-1, 1]$. □

5.9 Approssimazione del cerchio

In questa sezione, forniremo una sequenza di approssimazione per il cerchio, modificando leggermente quella precedentemente data per l'intervallo unitario. Questo è un modo per

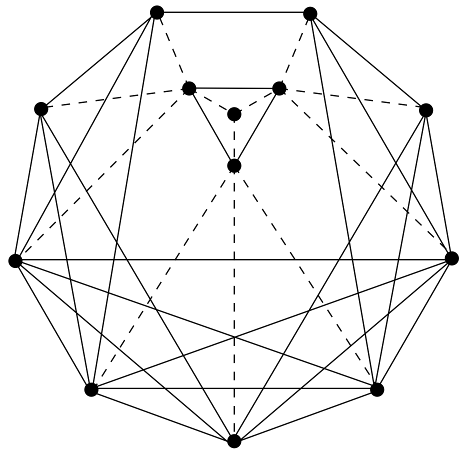


Figura 5.8: La sequenza di approssimazione $(\mathcal{R}'_n, f_n)$ $(n = 0, 1, 2)$

suggerire come si possano descrivere spazi topologici complessi mediante una sequenza di approssimazioni finite, discretamente topologizzate.

Sia $\mathcal{R}_n = (T_n, \mathrm{co}_n)$ la sequenza di approssimazione per la 2-NDR considerata nella precedente sezione. Si definisca una nuova sequenza $\mathcal{R}'_n = (T_n, \mathrm{co}'_n)$ ponendo

$$\mathrm{co}'_n = \mathrm{co}_n \cup \{(\overline{1}^n, 1^n), (1^n, \overline{1}^n)\}.$$

In pratica, lo spazio di tolleranza $\mathcal{R}'_n$ è uguale a $\mathcal{R}_n$, ma ha un arco in più che connette i due punti estremi corrispondenti ad una sequenza di 1 e ad una sequenza di $\overline{1}$. Fig. 5.8 mostra i primi tre livelli di questa sequenza di approssimazione: il diagramma è ottenuto "avvolgendo" su se stesso quello presentato in Fig. 5.6.
Ora vorremmo caratterizzare in modo preciso la relazione di tolleranza sul limite per lo spazio $\mathcal{R}'_\infty$. Lo facciamo come segue

Lemma 5.9.1 *Siano* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_\infty$ *due sequenze infinite. Allora,* $\mathbf{x}\, \mathrm{co}'_\infty\, \mathbf{y}$ *vale se e solo se* $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$ *o* $\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = \{-1, 1\}$. *Quindi, in particolare, la sequenza* $(\mathcal{R}'_n, f_n)$ *è globalmente transitiva.*

Dimostrazione: Il "se" è una conseguenza immediata del Lemma 5.8.1 e del modo in cui abbiamo definito co'_n. Per l'altro verso, si supponga che $\mathbf{x}\, \mathrm{co}'_\infty\, \mathbf{y}$; ciò significa che, per ogni $k \in \omega$, $\pi_k(\mathbf{x})\, \mathrm{co}'_k\, \pi_k(\mathbf{y})$. Sia $\mathrm{co}''_k = \mathrm{co}'_k \setminus \mathrm{co}_k = \{(\overline{1}^k, 1^k), (1^k, \overline{1}^k)\}$; si noti che $\pi_k(\mathbf{x})\, \mathrm{co}''_k\, \pi_k(\mathbf{y})$ implica che, per ogni $i \leq k$, vale anche $\pi_i(\mathbf{x})\, \mathrm{co}''_k\, \pi_k(\mathbf{y})$. Quindi possiamo porre

$$I = \{k : \pi_k(\mathbf{x})\, \mathrm{co}''_k\, \pi_k(\mathbf{y})\}$$

che è, per la precedente osservazione, un insieme di indici chiuso inferiormente. Se I è infinito, allora naturalmente $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \{\mathbf{1}, \overline{\mathbf{1}}\}$ e quindi $\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = \{-1, 1\}$; se I fosse vuoto, necessariamente varrebbe $\pi_k(\mathbf{x})\, \mathrm{co}_k\, \pi_k(\mathbf{y})$ per ogni k, e quindi $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$ (per il Lemma 5.8.1).
Si supponga ora che I sia finito e non vuoto, e sia $k = \max I$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\mathbf{x} = \overline{1}^k \mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = 1^k \mathbf{w}$, dove $\mathbf{v}$ non inizi con un $\overline{1}$, o $\mathbf{w}$ non inizi

con un 1. Poiché $\pi_i(\mathbf{x})\ \mathrm{co}'_i\ \pi_i(\mathbf{y})$ vale anche per $i > k$, necessariamente si dovrà avere $\pi_i(\mathbf{x})\ \mathrm{co}_i\ \pi_i(\mathbf{y})$ per ogni $i > k$; cioè, per tutti gli $i > k$, varrà

$$|\phi(\pi_i(\mathbf{x})) - \phi(\pi_i(\mathbf{y}))| \leq \frac{1}{2^{i-1}}. \tag{5.1}$$

Ma:

$$\phi(\pi_i(\mathbf{x})) = \phi(\overline{1}^k) + \frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v}))}{2^k}$$

e

$$\phi(\pi_i(\mathbf{y})) = \phi(1^k) + \frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w}))}{2^k}.$$

Ora, si osservi che

$$\phi(\overline{1}^k) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^k} - 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2^k}{2^k}.$$

e quindi, per ogni $i > k$

$$\begin{aligned}\phi(\pi_i(\mathbf{x})) - \phi(\pi_i(\mathbf{y})) &= \frac{1-2^k}{2^k} + \frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v}))}{2^k} - \frac{2^k - 1}{2^k} - \frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w}))}{2^k} = \\ &= \frac{2 - 2^{k+1}}{2^k} + \frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v})) - \phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w}))}{2^k}.\end{aligned}$$

Per far valere la (5.1), dobbiamo avere:

$$\left|\frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v})) - \phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w})) + 2}{2^k} - 2\right| \leq \frac{1}{2^{i-1}}. \tag{5.2}$$

Ma $\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v})) - \phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w})) \in [-2, 2]$, e quindi

$$\frac{\phi(\pi_{k-i}(\mathbf{v})) - \phi(\pi_{k-i}(\mathbf{w})) + 2}{2^k} - 2 \in [-2, \frac{4}{2^k} - 2];$$

quindi, il suo valore assoluto cade nell'intervallo $[2 - \frac{1}{2^{k-2}}, 2]$. Perché valga la disequazione (5.2), è necessario che

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{2^{k-2}} &\leq \frac{1}{2^{i-1}} \\ 8 - \frac{1}{2^k} &\leq \frac{2}{2^i} \\ 8 &\leq \frac{2 + 2^{i-k}}{2^i}. \end{aligned}$$

Questo dovrebbe valere per ogni $i > k$, e k è fissato. Quindi, in particolare

$$8 \leq \lim_{i\to\infty} \frac{2 + 2^{i-k}}{2^i} = 2^{-k}$$

che è impossibile. □

Quindi, lo spazio limite $\mathcal{R}'_\infty$ è transitivo, e la relazione di equivalenza è la stessa di co_∞, ma in più uguaglia le due sequenze $\mathbf{1}$ e $\overline{\mathbf{1}}$. Usando il risultato del Teorema 5.8.1, si ottiene che

Corollario 5.9.1 *Si consideri la sequenza di approssimazione* $(\mathcal{R}'_n, f_n)_{n\in\omega}$*, dove ogni spazio sia discretamente topologizzato. Allora, il suo limite ridotto è omeomorfo al cerchio*[8] S^1.

Dimostrazione: Si ricordi che S^1 è omeomorfo a $[0,1]$ quozientato con la relazione di equivalenza che identifica 0 e 1 (si veda Gaal [Gaa64], Section 14.I). □

[8] Il cerchio (unitario) è il sottospazio dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ indotto dall'insieme $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Capitolo 6

Spazi di tolleranza e semiordini

6.1 Ordine e disordine in teoria della misurazione

Nei capitoli precedenti ci siamo occupati di spazi di tolleranza in generale, considerando la relazione di indifferenza come "primitiva", senza investigare il modo in cui essa fosse stata generata o prodotta. In questo capitolo, restringeremo la nostra attenzione ad una classe speciale ma molto importante di spazi di tolleranza, cioè, a quegli spazi che sono generati da qualche (particolare) tipo di ordine parziale[1]. L'interesse di tali spazi deriva dalla teoria della misurazione, come verrà meglio spiegato nel resto di questa sezione.

Fred S.Roberts, nel suo lavoro enciclopedico sulla Teoria della Misurazione [Rob79], afferma che *una differenza importante fra una scienza "ben sviluppata" come la fisica ed alcune delle scienze meno "ben sviluppate" come la psicologia o la sociologia è il grado con cui le cose possono essere misurate.* Per questa ragione, pensiamo che dare dei fondamenti solidi alla teoria astratta della misurazione sarebbe utile non solo per la fisica – dove l'uso metodi ben stabilizzati di misurazione è una realtà di fatto – ma anche, e soprattutto, per quelle scienze sociali che ancora necessitano di strumenti formali per fare misurazioni e ragionare sui risultati da esse ottenuti.

Quando parla di cosa sia la misurazione, Bertrand Russell [Rus37, Chapter XXI] afferma che:

> Measurement of magnitudes is, in its most general sense, any method by which a unique and reciprocal correspondence is established between all or some of the magnitudes of a kind and all or some of the numbers[2] integral, rational, or real, as the case may be.

Naturalmente, ci si aspetta che questo assegnamento di numeri a grandezze rispetti certe proprietà fondamentali delle grandezze rappresentate, e le preservi come proprietà dei numeri usati per la rappresentazione. Così , ad esempio, se un certo oggetto A è "più pesante" di B, ci aspettiamo che abbia una massa più grande di quella di B; e similmente, se A è costituito da due sottoparti (disgiunte), diciamo A_1 e A_2, vogliamo che la massa di A eguagli la somma delle masse di A_1 e A_2.

[1] Parte dei risultati contenuti qui sono apparsi in [Bol96].

[2] Ma misurare senza usare numeri può essere un'attività sensata ed utile [Rob79].

Questo modo di pensare alla misurazione potrebbe essere chiamato "quantitativo", in contrasto ad un altro approccio che potremmo definire "comparativo". Come afferma Smith [Smi93], la misurazione coinvolge sempre un *confronto* del misurando con un altro oggetto della stessa specie, e potremmo dire che la misurazione è rappresentata dal risultato di tali confronti.

Se gli aspetti quantitativi sembrano essere i più importanti in fisica, quelli comparativi tendono a prevalere quando si considerano le scienze sociali. Se partiamo dall'assunzione che la misurazione sia un confronto, dovremmo prima decidere che tipo di confronti intendiamo permettere, e quali dovrebbero essere i risultati di ciascun confronto.

Si supponga, per esempio, di avere un insieme P di oggetti e di voler misurare le nostre preferenze riguardo gli oggetti di P. Potremmo consentirci di esprimere preferenze congiunte, ma preferiamo restringerci al caso dei soli confronti individuali. In altre parole, per ogni coppia di oggetti x, y di P, ci dobbiamo chiedere quale dei due sia quello che noi preferiamo, se ce n'è uno[3]. Il risultato dei nostri confronti sarà perciò una relazione binaria ρ su P, per la quale ci aspettiamo che valgano i due seguenti assiomi, per ogni $x, y, z \in P$:

1. *Irriflessività:* non vale che $x\rho x$, cioè nessun elemento è preferito a se stesso;

2. *Transitività:* se $x\rho y$ e $y\rho z$, allora $x\rho z$; cioè, se preferiamo x a y e y a z allora preferiamo x a z.

Questi assiomi impongono una specie di "condizione di razionalità" nel caso delle preferenze; un essere umano veramente razionale dovrebbe esprimere giudizi che soddisfano gli assiomi: in caso contrario diremmo che non sta agendo razionalmente [Rob79, Rus37]. Nel caso di misurazioni fisiche, questi assiomi affermano che i nostri strumenti di misura "funzionano bene"; detto altrimenti, definiscono le condizioni minimali sotto le quali la misurazione può avvenire.

Una relazione ρ che soddisfi le suddette condizioni (1),(2) viene chiamata *ordine parziale stretto*[4] (o semplicemente un ordine stretto), e si denota di solito con $<$, mentre la coppia $(P, <)$ è chiamata *insieme strettamente (parzialmente) ordinato* (abbreviato in "poset"). Quando si possa sottintendere la relazione, scriveremo semplicemente P per intendere sia il poset che l'insieme soggiacente; assumeremo sempre che P sia non vuoto.

Così , il risultato di una misurazione è un ordine parziale $<$ sull'insieme P dei misurandi; dati due oggetti x, y di P, diremo che sono *confrontabili* se $x < y$ o $x > y$ (cioè, $y < x$); essi sono invece *inconfrontabili* (terminologie alternative: indifferenti, indistinguibili, indipendenti) se non sono confrontabili, ed in questo caso scriveremo $x \sim y$. La relazione $\sim$ viene talvolta chiamata "disordine", essendo il complemento (della chiusura simmetrica) di un ordine (stretto).

[3]Naturalmente, potremmo anche considerare un tipo di confronti più complesso, dove dobbiamo anche dichiarare "di quanto l'oggetto che preferiamo sia migliore dell'altro". Questo va oltre gli scopi di questa tesi, ma si veda [Rob79] per questa classe estesa di confronti.

[4]In questa sezione, considereremo principalmente ordini parziali stretti, invece degli ordini parziali definiti nel Capitolo 3, ed ometteremo pertanto l'aggettivo "stretto". Si noti comunque che esiste una naturale corrispondenza uno-a-uno fra i due tipi di relazioni, essendo l'unica differenza costituita dalla riflessività (irriflessività). Cionondimeno, preferiamo lavorare con ordini parziali stretti sia perché questo è l'approccio più comune nell'area della teoria della misurazione, sia perché questo è più adatto alle nostre necessità.

Qual è la corretta interpretazione per la relazione $\sim$ di indifferenza? Questa è chiaramente una relazione di tolleranza, e, nel caso della preferenza, $x \sim y$ significa semplicemente che siamo indifferenti fra x e y o, in altre parole, che x e y possono essere liberamente scambiati senza alcuna perdita o guadagno. Ovviamente, $\sim$ è una relazione riflessiva e simmetrica, ma in generale non è transitiva (quando lo è, diciamo che $<$ è un *ordine debole*; in particolare, quando $\sim$ coincide con l'identità di P, diciamo che $<$ è un ordine *totale*, o lineare; si veda anche il Capitolo 3). Esempi classici che contraddicono la transitività dell'indifferenza nelle scienze sociali sono già stati presentati nella Sezione 5.1.

Se si vuole modellare un pezzo del mondo reale, l'imprecisione di cui la misurazione è affetta dovrebbe essere considerata fin dall'inizio. Questo approccio è ben spiegato da Petri in [Pet80b] (si veda anche [Pet96]):

> Concerning net theory, we take the standpoint that this imprecision is not only a consequence of our poor abilities to distinguish by direct or indirect observation, but it is in the nature of the measuring process itself and in our relation to the object we measure.

Di conseguenza, ogni tecnica matematica per modellare processi dovrebbe tenere conto della natura complessa dei flussi di informazione da rappresentare, e dell'influenza del rumore come struttura esterna che produce imprecisione.

La precedente discussione dovrebbe aver chiarito il motivo per cui la tolleranza indotta dall'inconfrontabilità merita un'attenzione speciale; nella letteratura corrente, un grafo che sia la chiusura simmetrica di un ordine parziale stretto viene chiamato *grafo di comparabilità* (si veda Golumbic [Gol80] per una rassegna generale su questo argomento). Uno *spazio (di tolleranza) di inconfrontabilità* è quindi il duale[5] di un grafo di comparabilità.

Anche se non siamo interessati al problema di studiare il caso generale degli spazi di inconfrontabilità, presentiamo una caratterizzazione molto sintetica della confrontabilità, dovuta a Gouila-Houri [GH62]:

Teorema 6.1.1 (Ghouila-Houri [GH62]) *Un grafo $G = (V, E)$ è un grafo di confrontabilità se e solo se non contiene alcun ciclo $v_1, \ldots, v_n$ (con $n > 2$ dispari) tale che $(v_i, v_{i+2}) \notin E$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ (dove l'addizione è modulo n).* $\square$

Un ciclo come quello che compare nell'enunciato del Teorema di Ghouila-Houri viene chiamato *ciclo dispari proibito*; quindi, uno spazio di inconfrontabilità è uno spazio il cui duale non contiene cicli dispari proibiti.

6.2 Generalità sui semiordini e la noetherianità forte

Nella sezione precedente, abbiamo spiegato in modo abbastanza dettagliato il ruolo dell'inconfrontabilità nella teoria degli spazi di tolleranza, quando essa venga applicata alla misurazione di valori "scalari". Ora stiamo per introdurre alcuni assiomi più forti sulla

[5] Il duale di uno spazio di tolleranza (grafo non orientato) è il grafo che ha lo stesso insieme di nodi, e che contiene un arco fra due nodi esattamente quando non c'era alcun arco nello spazio originale.

natura degli ordini che derivano da misurazioni, e questo ci permetterà di ottenere ulteriori restrizioni sul tipo di spazi di tolleranza generati.

Anche se abbiamo scelto di considerare solo gli aspetti comparativi, ammettiamo pur sempre l'esistenza di una funzione ideale che fornisca la "vera" misura dei nostri oggetti; cioè, assumiamo che esista una funzione (sconosciuta) $f : P \to \mathbb{R}$ che esprima le misure degli oggetti (le loro masse, le loro valutazioni di preferenza etc.). La nostra relazione d'ordine ci dà semplicemente un quadro parziale di questa funzione, nel senso che ci aspettiamo che valga la seguente relazione:

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Questa è una specie di assunzione di correttezza sul nostro metodo di misurazione: se concludiamo che x è più leggero di y, allora x è *veramente* più leggero di y. Ma assumere il viceversa sarebbe troppo: ci darebbe un ordine debole, che è irrealistico alla luce delle considerazioni precedentemente fatte.

Per risolvere questo problema, Luce [Luc56] – motivato dalla nozione di soglia in psicofisica – suggerì che la relazione "minore di" fosse sostituita da una relazione più stringente tipo "sufficientemente minore di"; in altre parole, Luce propose di assumere l'esistenza di un valore di soglia $\delta > 0$ tale che:

$$x < y \iff f(x) + \delta < f(y).$$

La coppia (f, δ) è una *rappresentazione* per il poset $(P, <)$. Naturalmente il valore di δ è irrilevante per noi: qualsiasi δ va egualmente bene, basta cambiare in modo opportuno la scala f.

È facile mostrare che ogni poset rappresentabile P soddisfa i seguenti assiomi per ogni $x, y, z, w \in P$:

- *Assioma A1.* se $x < y$ e $z < w$ allora $x < w$ oppure $z < y$;
- *Assioma A2.* se $x < y < z$ allora $x \not< w$ oppure $z \not< w$.

La Fig. 6.1 dà una rappresentazione grafica dei due assiomi, sottoforma di diagrammi di Hasse; se le relazioni indicate dalle linee piene valgono, allora una delle relazioni tratteggiate deve necessariamente valere, in forza degli assiomi.
In Fig. 6.2 presentiamo gli assiomi mostrando un esempio di come essi funzionino in presenza di una rappresentazione (qui ogni punto x è rappresentato da un intervallo chiuso sulla retta reale, cioè $[f(x)-\delta, f(x)+\delta]$, e l'inconfrontabilità è determinata dalla sovrapposizione di intervalli).

Un poset che soddisfi l'assioma A1 è chiamato *ordine di intervallo*; se soddisfa anche l'assioma A2, diciamo che è un *semiordine* (si veda per esempio [Smi93, Fis85, Rob79]). Quindi i poset rappresentabili sono i semiordini; il viceversa non è vero in generale (ci sono semiordini infiniti che non hanno alcuna rappresentazione), ma vale nel caso finito, come mostrato nel seguente ben noto risultato:

Teorema 6.2.1 (Teorema di Rappresentazione di Scott-Suppes [SS58]) *Se P è un semiordine finito, allora esiste una funzione $f : P \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall x, y \in P.\, x < y \text{ iff } f(x) + 1 < f(y).$$

□

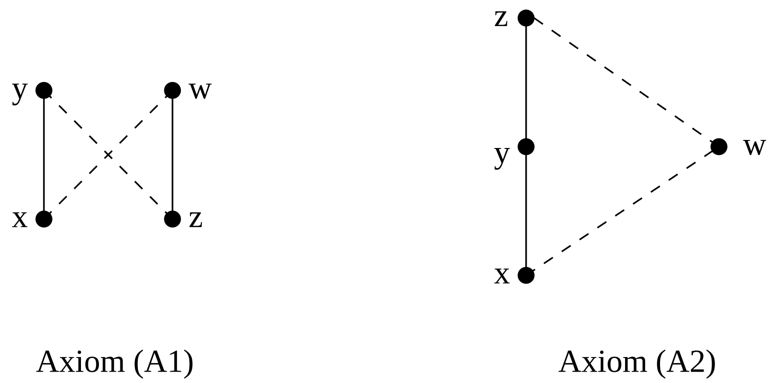


Figura 6.1: Gli assiomi di semiordine

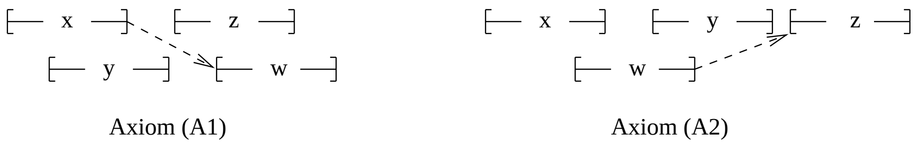


Figura 6.2: Rappresentazione degli assiomi sulla retta reale

Nel resto di questo capitolo, saremo interessati soprattutto a studiare proprietà di uno speciale tipo di semiordini (e quindi anche degli spazi di tolleranza ad essi associati): i semiordini fortemente noetheriani.

Si consideri un poset $(P,<)$; diremo che P è *noetheriano*[6] se e solo se la relazione $>$ è noetheriana, cioè se e solo se non esiste una sequenza $x_0, x_1, x_2, \dots$ con

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

cioè, la relazione $<$ è un ordine ben fondato. Diremo che P è *fortemente noetheriano* se e solo se, per ogni $X \subseteq P$:

- se X è un sottoposet linearmente ordinato dotato di massimo, allora X è finito.

È immediato verificare che un poset fortemente noetheriano è anche noetheriano, ma il viceversa non è vero in generale, nemmeno nel caso dei semiordini; per esempio, se si considera l'ordinale $\omega + 1$, ordinato nel modo usuale, si vedrà che esso è noetheriano ma non fortemente noetheriano (Fig. 6.3).

Una giustificazione informale per l'uso dei semiordini fortemente noetheriani è che in molti casi si considerano grandezze che sono inferiormente limitate nella scala. Per esempio, questo avviene con le masse, dove la scala è limitata dallo zero (masse negative non sono consentite), o anche nel caso di temperature (lo zero assoluto è il limite in questo caso). Se ci si restringe a rappresentazioni che hanno, diciamo, valori non negativi, si ottengono certamente semiordini fortemente noetheriani.

Useremo ora il Teorema di Scott-Suppes per dimostrare una proprietà molto utile delle catene discendenti in un semiordine.

[6] Alcuni autori usano il termine *conoetheriano*.

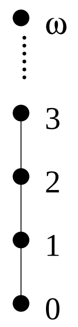


Figura 6.3: L'ordinale $\omega + 1$

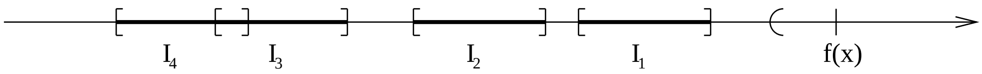


Figura 6.4: Dimostrazione della Proprietà 6.2.1

Proprietà 6.2.1 *Sia $(P, <)$ un semiordine, e si considerino due catene discendenti della forma:*

$$x = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$$

$$x = y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_m$$

con $m > 2n$. Esiste allora un indice $i = 1, \ldots, m$ tale che

- *o $x_j > y_i > x_{j+1}$ per qualche $j = 0, \ldots, n-1$*
- *oppure $x_n > y_i$.*

Dimostrazione: Sia $X = \{x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$; la restrizione di $<$ ad X dà origine ad un semiordine finito, e quindi possiamo usare il Teorema di Scott-Suppes per trovare una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ che rappresenta X sui reali.

Per ciascun $k = 1, \ldots, n$ sia $I_k = [f(x_k) - 1, f(x_k) + 1]$, e sia anche $S = (-\infty, f(x) - 1)$ e $T = S \setminus \bigcup_k I_k$. Si osservi che per ogni $j = 1, \ldots, m$, $f(y_j) \in S$ (poiché $y_j < x \implies f(y_j) < f(x) - 1$). Se per qualche j, $f(y_j) \in T$ allora o vale $x_k > y_j > x_{k+1}$ per qualche k, oppure $x_n > y_j$ (si veda Fig. 6.4), come richiesto.

Per assurdo, si supponga che nessun j soddisfi $f(y_j) \in T$. Ciò significa che

$$\forall j = 1, \ldots, m \exists k = 1, \ldots, n.\ f(y_j) \in I_k.$$

Per il principio della piccionaia, esiste un indice k tale che I_k contiene più di due punti: ma se un intervallo di lunghezza 2 contiene tre punti, due di essi devono avere distanza al più 1, e quindi dovrebbero essere indistinguibili; questa è una contraddizione (non ci sono due y_j indistinguibili). □

Sia $(P, <)$ un poset, e si definisca, per ogni $x \in P$, l'insieme:

$$C(x) = \{x = x_0 > x_1 > \ldots > x_n : n \in \omega\}$$

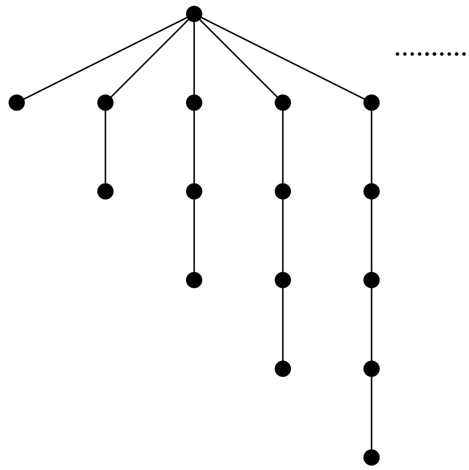


Figura 6.5: Un insieme illimitato di catene discendenti

(l'insieme delle catene finite decrescenti da x); sia inoltre

$$L(x) = \{|\gamma| - 1 : \gamma \in C(x)\}.$$

Notate che $C(x)$ è chiuso per prefissi, e $L(x)$ è perciò un insieme di numeri naturali chiuso verso il basso. Quindi, o $L(x)$ è finito oppure $L(x) = \omega$. Il secondo caso è possibile anche quando P sia noetheriano, perché ci potrebbero essere infinite catene discendenti finite di lunghezza crescente a partire da un singolo elemento (si veda Fig. 6.5).

Questo è anche possibile nel caso di un semiordine noetheriano (vedi Fig. 6.3). Dimostreremo però fra un momento che questo è impossibile in un semiordine fortemente noetheriano.

Lemma 6.2.1 *Sia $(P,<)$ un poset, e si supponga che esistano in P le seguente catene discendenti:*

$$\begin{array}{rcl} \gamma^{(0)} & = & x_0^{(0)} \\ \gamma^{(1)} & = & x_0^{(1)} > x_1^{(1)} \\ \gamma^{(2)} & = & x_0^{(2)} > x_1^{(2)} > x_2^{(2)} \\ \ldots & & \end{array}$$

dove $x_0^{(0)} = x_0^{(1)} = \ldots = x$, ed inoltre ogni elemento che compare in $\gamma^{(k)}$ compare anche in $\gamma^{(k+1)}$ (per ogni $k \in \omega$). Allora P non è fortemente noetheriano.

Dimostrazione: Sia $X = \{x_i^{(j)} : 0 \le i \le j, j \in \omega\}$. Naturalmente, X è un insieme infinito, ed inoltre è linearmente ordinato. Infatti, si prendano $x_i^{(j)}, x_{i'}^{(j')}$ e si ponga $k = \max\{j, j'\}$. Allora, per qualche s, s' si ha:

$$x_s^{(k)} = x_i^{(j)}, x_{s'}^{(k)} = x_{i'}^{(j')}.$$

Ma ora $x_s^{(k)}$ e $x_{s'}^{(k)}$ sono confrontabili (perché appartengono alla stessa catena). Quindi X è un sottoposet infinito linearmente ordinato di P. Ma contiene un massimo elemento x, e quindi P non può essere fortemente noetheriano. $\square$

Di conseguenza, si ha:

Teorema 6.2.2 *Sia $(P, <)$ un semiordine fortemente noetheriano. Allora, per ogni $x \in P$, $L(x)$ è un insieme finito di numeri naturali, e definiamo:*

$$h(x) = \max L(x)$$

(l'altezza[7] di x).

Dimostrazione: Per assurdo, supponete che $L(x) = \omega$ per qualche x. Allora troviamo un'infinita sequenza di catene discendenti sempre più lunghe che partono da x, diciamo:

$$\begin{array}{rcl} \psi^{(0)} & = & x_0^{(0)} \\ \psi^{(1)} & = & x_0^{(1)} > x_1^{(1)} \\ \psi^{(2)} & = & x_0^{(2)} > x_1^{(2)} > x_2^{(2)} \\ \cdots & & \end{array}$$

dove $x = x_0^{(0)} = x_0^{(1)} = \ldots$. Ora, costruiamo induttivamente una nuova sequenza $\gamma^{(k)}$ come segue. Poniamo:

$$\gamma^{(0)} = x_0^{(0)}.$$

Si supponga di aver già costruito $\gamma^{(0)}, \ldots, \gamma^{(n)}$, e si considerino le due catene $\gamma^{(n)}$ e $\psi^{(2n+1)}$. Usando la Proprietà 6.2.1, troviamo un nuovo elemento per "arricchire" la catena $\gamma^{(n)}$, e quindi lo possiamo aggiungere alla catena ottenendone una più lunga $\gamma^{(n+1)}$. Ora la sequenza $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \ldots$ soddisfa le ipotesi del Lemma 6.2.1, e quindi P non può essere fortemente noetheriano: una contraddizione. $\square$

Ecco alcuni semplici fatti relativi alle altezze:

Proprietà 6.2.2 *Sia $(P, <)$ un semiordine fortemente noetheriano. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *se $x < y$ allora $h(x) < h(y)$;*
2. *se $h(x) = n + 1$ allora esiste $y \in P$ con $h(y) = n$ e $y < x$;*
3. *esiste qualche x tale che $h(x) = 0$;*
4. *se $h(x) = h(y)$ allora $x \sim y$.*

[7] Questo uso della parola altezza è in qualche modo non standard; nella letteratura corrente, l'altezza di un elemento è definita solo quando tutte le catene discendenti massimali che partono da quell'elemento hanno la stessa lunghezza (proprietà di Jordan-Dedekind).

Dimostrazione: (1) Si prenda una qualunque catena discendente da x, diciamo $x = x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Allora $y > x_0 > x_1 > \ldots > x_n$ è una catena discendente che parte da y che ha lunghezza $n+1$. Ciò significa che:

$$n \in L(x) \implies n+1 \in L(y)$$

e quindi $\max L(x) < \max L(y)$.
(2) Se $h(x) = n+1$ allora esiste qualche catena della forma $x = x_0 > x_1 > \ldots > x_{n+1}$. Si prenda $y = x_1$. Ovviamente $y < x$, e $h(y) \geq n$ (essendo $n \in L(y)$). Ma $y < x$ implica (usando (1)) che $h(y) < h(x) = n+1$, e perciò $h(y) = n$.
(3) Si usi ripetutamente (2) e l'assunzione che $P \neq \emptyset$.
(4) Conseguenza di (1). $\square$

6.3 Tagli in semiordini fortemente noetheriani

Un modo di interpretare la relazione di indifferenza di uno spazio di tolleranza consiste nel dire che essa esprime una sorta di "consistenza" o "compatibilità": due punti sono in tolleranza se e solo se sono compatibili, cioè se c'è qualche possibilità che la vera misura soddisfi entrambi i vincoli (intervalli). Chiaramente, l'informazione massimale si può ottenere raccogliendo un insieme massimale di misurazioni a due a due compatibili, cioè una clique massimale dello spazio di tolleranza. Una clique massimale ha in effetti il ruolo di un punto nella scala di misurazione che stiamo utilizzando.

Se si considerano spazi di tolleranza indotti da ordini parziali, le clique massimali corrispondono ad anticatene massimali dell'ordine, che chiameremo d'ora in avanti tagli, usando la terminologia introdotta da Petri.

Formalmente, dato un ordine parziale $(P, <)$, un *taglio* (*linea*) è un insieme massimale di elementi a due a due inconfrontabili (confrontabili). In questa sezione, studieremo la struttura dei tagli in un semiordine fortemente noetheriano.

D'ora in poi, fissiamo un qualsiasi semiordine fortemente noetheriano non vuoto $(P, <)$, ed usiamo $h(x)$ per indicare l'altezza di x. Inoltre, per ogni $X \subseteq P$ scriviamo X^n per

$$X^n = \{x \in X : h(x) = n\}.$$

Nel resto di questo Capitolo, stiamo assumendo che:

Lemma 6.3.1 (Lemma di Kuratowski) *Ogni insieme di elementi a due a due (in)confrontabili è incluso in una linea (taglio, risp.).*

Kelley [Kel55] osserva che questo è equivalente all'Assioma della Scelta.
Si noti la seguente:

Proprietà 6.3.1 *Se $x \sim y$ allora $|h(x) - h(y)| \leq 1$.*

Dimostrazione: Per assurdo, si supponga che $x \sim y$ con $h(x) = n$ e $h(y) = n+k+1$ (con $k > 0$). Usando la Proprietà 6.2.2 (2) troveremo due elementi y', y'' con $y' < y'' < y$ e $h(y') = n, h(y'') = n+k$. Ma $x \sim y'$ (per la Proprietà 6.2.2 (4)) e quindi $x < y$: una contraddizione. $\square$

Ora, sia $\mathcal{C}_P$ ($\mathcal{L}_P$) l'insieme di tutti i tagli (linee, risp.) di P. Per ogni taglio $C \in \mathcal{C}_P$, definiamo:

$$h(C) = \min\{h(x) : x \in C\} \text{ (l'altezza di } C)$$
$$\hat{C} = \{x \in C : h(x) = h(C)\} = C^{h(C)} \text{ (la parte inferiore di } C).$$

Abbiamo che:

Corollario 6.3.1 *Per ogni taglio C*

$$\forall x \in C.\, h(C) \leq h(x) \leq h(C) + 1.$$

Dimostrazione: Immediato dalla Proprietà 6.3.1. □

Così , se C è un taglio di altezza n, allora o tutti gli elementi di C hanno altezza n, oppure C contiene alcuni elementi di altezza n ed altri elementi di altezza $n+1$ (e nient'altro). Chiamiamo un taglio C *orizzontale* nel primo caso, cioè quando

$$\forall x \in C.\, h(x) = h(C)$$

e *verticale* altrimenti.

Proprietà 6.3.2 *Sia C un taglio:*

1. *se C è orizzontale, allora $\hat{C} = C = P^{h(C)}$;*
2. *se C è verticale, allora $\hat{C} \subset C$ e $\hat{C} \subset P^{h(C)}$.*

Dimostrazione: (1) La prima uguaglianza è banale. Per la seconda eguaglianza, l'inclusione da sinistra a destra è ovvia. Si supponga che $h(x) = h(C)$; allora x è inconfrontabile con ogni elemento di C e quindi $x \in C$.
(2) La prima inclusione è propria per definizione. Per la seconda, si supponga per assurdo che $\hat{C} = \{x \in P : h(x) = h(C)\}$, e sia $y \in C$ un qualunque elemento di altezza $h(C)+1$. Allora troviamo (Proprietà 6.2.2) un elemento x con $h(x) = h(C)$ tale che $x < y$: che è chiaramente impossibile, poiché $x, y \in C$. □

Una conseguenza della proprietà precedente è che, per ogni k, esiste al più un taglio orizzontale di altezza k; si osservi anche che due diversi tagli orizzontali sono sempre disgiunti. Inoltre:

Proprietà 6.3.3 *Due tagli verticali qualsiasi della stessa altezza sono non disgiunti.*

Dimostrazione: Siano C_1, C_2 due tagli verticali di altezza n, e si supponga che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Ora si prendano due $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ qualsiasi di altezza $n+1$. Poiché $x_1 \notin C_2$, deve esistere qualche $y_2 \in C_2$ con $y_2 < x_1$, e similmente $\exists y_1 \in C_1.\, y_1 < x_2$. Ma ora deve essere $y_2 < x_2$ o $y_1 < x_1$: entrambi i casi portano ad una contraddizione. □

Il seguente lemma stabilisce un'importante caratterizzazione dell'intersezione fra tagli verticali della stessa altezza.

Lemma 6.3.2 *Siano C_1, C_2 due tagli verticali (distinti) di altezza n. Allora, una ed una sola delle seguenti proprietà vale:*

- $C_1^n \subset C_2^n$ *e* $C_2^{n+1} \subset C_1^{n+1}$*;*
- $C_2^n \subset C_1^n$ *e* $C_1^{n+1} \subset C_2^{n+1}$.

Dimostrazione: Per la Proprietà 6.3.3, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Si supponga per prima cosa che sia $C_1^n \setminus C_2^n$ che $C_2^n \setminus C_1^n$ siano non vuoti, e sia $x \in C_1^n \setminus C_2^n$ e $y \in C_2^n \setminus C_1^n$. Poiché $x \notin C_2$, esiste $x' \in C_2$ tale che $x < x'$, e similmente esiste $y' \in C_1$ tale che $y < y'$. Ma queste due cose insieme implicano che $x < y'$ (che è impossibile, essendo $x, y' \in C_1$) oppure $y < x'$ (che è pure impossibile per ragioni simili). Dobbiamo pertanto concludere che:

a) o $C_1^n \subseteq C_2^n$

a') oppure $C_2^n \subseteq C_1^n$.

Con lo stesso tipo di ragionamento, si ottiene:

b) o $C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}$

b') oppure $C_2^{n+1} \subseteq C_1^{n+1}$.

Si noti che a)+b) implicano $C_1 \subseteq C_2$, che è chiaramente impossibile (essendo C_1, C_2 tagli distinti), e lo stesso vale per a')+b'). Quindi le sole possibilità rimanenti sono quelle elencate nell'enunciato. □

6.4 Un ordine lineare consecutivo per i tagli

Il risultato del Lemma 6.3.2 è un passo importante verso la comprensione di come i tagli di un semiordine fortemente noetheriano siano strutturati. Per essere più precisi, possiamo costruire una sorta di "dinamica" dei tagli, che ci consente di passare da un taglio all'altro in modo per così dire "continuo". Consideriamo il taglio orizzontale di altezza 0 in un semiordine fortemente noetheriano, come schematizzato in Fig. 6.6 (A). Se vogliamo aggiungere qualche nuovo elemento di altezza 1, dobbiamo per forza lasciare fuori qualche elemento di altezza 0 (Fig. 6.6 (B)). Procediamo in questo modo (taglio (C)), finché non rimane nessun elemento di altezza 0, e raggiungiamo così il taglio orizzontale di altezza 1 (D). Poi il processo può continuare nello stesso modo da (D) muovendosi verso l'alto (E). Il movimento da un taglio all'altro è unico, come garantito dal Lemma 6.3.2.

Possiamo formalizzare questo considerando la seguente relazione fra tagli:

$$C_1 \prec C_2 \text{ iff } (h(C_1) = h(C_2) \text{ e } \hat{C}_1 \supset \hat{C}_2) \text{ o } h(C_1) < h(C_2).$$

Una conseguenza del Lemma 6.3.2 è che:

Lemma 6.4.1 *La relazione* $\prec$ *è un ordine lineare.*

Dimostrazione: È immediato verificare che $\prec$ è un ordine parziale. Ora, si prendano due tagli C_1, C_2. Se $h(C_1) \neq h(C_2)$ allora essi devono essere in qualche modo $\prec$-relati. Se altrimenti $h(C_1) = h(C_2)$ allora, per il Lemma 6.3.2, si ha $\hat{C}_1 \subset \hat{C}_2$ oppure il viceversa, e questo conclude la prova. □

Come esempio, si consideri il semiordine in Fig. 6.7. Ecco un elenco dei suoi tagli (con numerazione arbitraria):

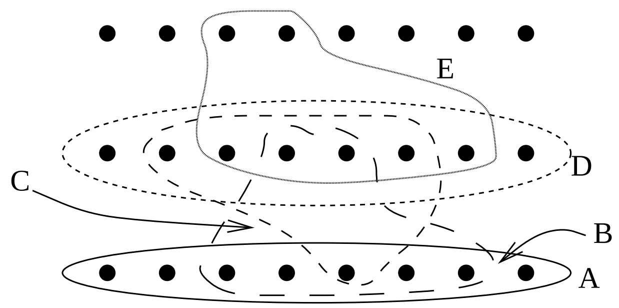


Figura 6.6: La dinamica dei tagli in un semiordine fortemente noetheriano

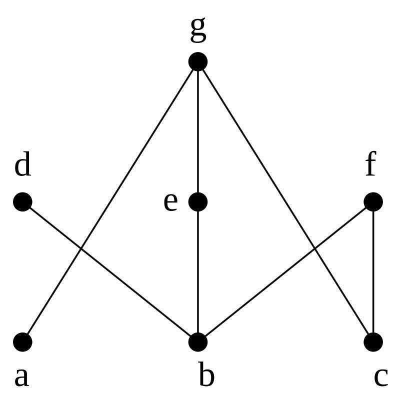


Figura 6.7: Un semiordine finito

TAGLIO	*TIPO*	*ALTEZZA*	*PARTE INFERIORE*
$C_1 = \{a, b, c\}$	orizzontale	0	$\{a, b, c\}$
$C_2 = \{a, d, e, f\}$	verticale	0	$\{a\}$
$C_3 = \{a, d, e, c\}$	verticale	0	$\{a, c\}$
$C_4 = \{d, f, g\}$	verticale	1	$\{d, f\}$

L'ordine fra i tagli qui è

$$C_1 \prec C_3 \prec C_2 \prec C_4.$$

Un ordine lineare $\ll$ su $\mathcal{C}_P$ è *consecutivo* se e solo se

$$C_1 \ll C_2 \ll C_3 \text{ e } x \in C_1 \cap C_3 \implies x \in C_2,$$

cioè, l'insieme dei tagli che includono un certo elemento forma un intervallo nell'ordine $\ll$.

Teorema 6.4.1 *La relazione $\prec$ è un ordine lineare consecutivo.*

Dimostrazione: Supponiamo che $C_1 \prec C_2 \prec C_3$ con $x \in C_1 \cap C_3$. Distinguiamo quattro casi:

1. $h(C_1) = h(C_2) = h(C_3) = n$;
2. $n = h(C_1) < h(C_2) = h(C_3)$;
3. $n = h(C_1) = h(C_2) < h(C_3)$;
4. $h(C_1) < h(C_2) < h(C_3)$.

Caso 1. Abbiamo $C_3^n \subset C_2^n \subset C_1^n$ e $C_1^{n+1} \subset C_2^{n+1} \subset C_3^{n+1}$. Se $h(x) = n$ allora $x \in C_3^n$ e quindi $x \in C_2^n$. Se $h(x) = n + 1$ allora $x \in C_1^{n+1}$ e quindi $x \in C_2^{n+1}$.
Caso 2. In questo caso $h(x) = n + 1$ e $C_3^{n+1} \subset C_2^{n+1}$. Ma $x \in C_3^{n+1}$ e quindi $x \in C_2^{n+1}$.
Caso 3. Anche in questo caso $h(x) = n + 1$, $C_2^n \subset C_1^n$ e $C_1^{n+1} \subset C_2^{n+1}$. Ma $x \in C_1^{n+1}$ e quindi $x \in C_2^{n+1}$.
Caso 4. Questo caso è impossibile, poiché implicherebbe $C_1 \cap C_3 = \emptyset$. $\square$

La seguente tabella mostra gli intervalli corrispondenti all'esempio precedente (una crocetta significa che l'elemento appartiene al taglio):

Elemento	C_1	C_3	C_2	C_4
a	x	x	x	
b	x			
c	x	x		
d		x	x	x
e		x	x	
f			x	x
g				x

Per ogni $x \in P$, poniamo $\mathcal{I}_x = \{C \in \mathcal{C}_P : x \in C\}$, eda anche

$$\mathcal{I}_x^n = \{C \in \mathcal{I}_x, h(C) = n\}.$$

Useremo la notazione $C_1 \preceq C_2$ per $C_1 \prec C_2$ o $C_1 = C_2$. Il seguente Lemma mostra che $\mathcal{I}_x$ è in effetti un intervallo chiuso rispetto alla relazione $\prec$.

Lemma 6.4.2 *Per ogni $x \in P$, esistono $C_x^L, C_x^R \in \mathcal{I}_x$ tali che per ogni $C \in \mathcal{C}_P$ si ha*

$$x \in C \text{ se e solo se } C_x^L \preceq C \preceq C_x^R.$$

Dimostrazione: Dimostriamo solo l'esistenza di C_x^L, e proviamo l'implicazione da sinistra a destra; gli stessi argomenti determinano l'esistenza di C_x^R, mentre l'implicazione inversa si ottiene usando semplicemente la consecutività di $\prec$.
Supponete che x abbia altezza n, e si osservi per incominciare che $\mathcal{I}_x$ contiene tagli di altezza $n-1$ e/o n. Consideriamo due casi.
Primo caso. Supponete che nessun taglio di altezza $n-1$ includa x. Si prenda allora:

$$C_x^L = (\bigcup_{C \in \mathcal{I}_x} C^n) \cup (\bigcap_{C \in \mathcal{I}_x} C^{n+1}).$$

e si osservi che:

1. $x \in C_x^L$, perché $x \in C^n$ per ogni $C \in \mathcal{I}_x$.

2. C_x^L è un insieme di elementi a due a due indipendenti; il solo caso non banale è quando $z \in \bigcup_{C \in \mathcal{I}_x} C^n$, $y \in \bigcap_{C \in \mathcal{I}_x} C^{n+1}$. Ma questo implica che $z \in \tilde{C}^n$ per qualche taglio $\tilde{C}$ che include x, e quindi $z, y \in \tilde{C}$, che a sua volta implica $z \sim y$.

3. C_x^L è un taglio. Per assurdo, si supponga che $\exists z \notin C_x^L$ tale che $z \sim y$ per ogni $y \in C_x^L$. Essendo $z \sim x$ abbiamo che $h(z) \in \{n-1, n, n+1\}$. Distinguiamo questi tre casi:

   - se $h(z) = n-1$ allora $\{x, z\}$ si può estendere ad un taglio di altezza $n-1$ che include x, il che contraddice la nostra prima ipotesi;
   - se $h(z) = n$ allora $\{x, z\}$ si può estendere ad un taglio $C \in \mathcal{I}_x$ contenente z, e quindi $z \in C_x^L$, una contraddizione;
   - se $h(z) = n+1$ si prenda un qualsiasi $C \in \mathcal{I}_x$. Ora $z \sim y$ per tutti gli $y \in C^n$, e quindi $z \in C$. Allora $z \in C_x^L$, una contraddizione.

4. È immediato vedere che $C_x^L \preceq C$ per tutti i $C \in \mathcal{I}_x$.

Secondo caso. Supponiamo che qualche taglio di altezza $n-1$ contenga x. Sia:

$$C_x^L = (\bigcup_{C \in \mathcal{I}_x^{n-1}} C^{n-1}) \cup (\bigcap_{C \in \mathcal{I}_x^{n-1}} C^n).$$

e si osservi che:

1. $x \in C_x^L$, essendo $x \in C^n$ per tutti i $C \in \mathcal{I}_x$.

2. C_x^L è un insieme di elementi a due a due indipendenti (banale).

3. C_x^L è un taglio. Si prenda z come prima:

   - se $h(z) = n - 1$, allora $\{x, z\}$ si può estendere ad un taglio che include z, e quindi $z \in C_x^L$, una contraddizione;
   - se $h(z) = n$, allora si prenda un qualsiasi taglio $C \in \mathcal{I}_x^{n-1}$. Abbiamo che $z \sim y$ per tutti gli $y \in C^{n-1}$, e quindi $z \in C$. Perciò $z \in C_x^L$, una contraddizione;
   - il caso $h(z) = n + 1$ è impossibile, essendo $\bigcup_{C \in \mathcal{I}_x^{n-1}} C^{n-1}$ non vuoto.

4. È immediato verificare che $C_x^L \preceq C$ per tutti i $C \in \mathcal{I}_x$. □

Il seguente lemma dà un'utile caratterizzazione della relazione d'ordine $<$ in termini dell'ordinamento $\prec$ fra tagli.

Lemma 6.4.3 *Per ogni $x, y \in P$ si ha:*

$$x < y \ \textit{iff} \ C_x^R \prec C_y^L.$$

Dimostrazione: $\Longrightarrow$ In virtù del Corollario 6.3.1, se il taglio C contiene z allora

$$h(z) \geq h(C) \geq h(z) - 1,$$

e quindi

$$h(C_y^L) \geq h(y) - 1 \geq h(x) \geq h(C_x^R).$$

Se $h(C_y^L) > h(C_x^R)$ il risultato è immediato. Si supponga che $h(C_y^L) = h(C_x^R) = n$. Abbiamo tre casi:

- se $C_x^R = C_y^L$ allora $x \sim y$: una contraddizione;
- se $C_y^L \prec C_x^R$ allora $(C_y^L)^n \supset (C_x^R)^n$ e $(C_y^L)^{n+1} \subset (C_x^R)^{n+1}$. Si osservi che $h(x) = n$ e $h(y) = n + 1$; perciò $x \in (C_x^R)^n \subset C_y^L$ e quindi $x \sim y$: una contraddizione;
- il solo caso possibile è dunque $C_x^R \prec C_y^L$.

$\Longleftarrow$ Non c'è un taglio che include sia x che y, e quindi $x \not\sim y$. Se fosse $y < x$, per la prima parte di questa dimostrazione, avremmo $C_y^R \prec C_x^L$ e quindi $C_y^L \prec C_x^R$, che contraddice l'ipotesi. □

Si definiscano le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{lll} x <_L y & \text{iff} & C_x^L \prec C_y^L \\ x <_R y & \text{iff} & C_x^R \prec C_y^R \end{array}$$

Osserviamo che:

Proprietà 6.4.1 *Le relazioni $<_L, <_R$ sono ordini deboli.*

Dimostrazione: Dimostriamo l'enunciato solo per $<_L$ (la dimostrazione per $<_R$ è analoga). È banale verificare che $<_L$ è un ordine parziale. Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned} x \sim_L y &\iff x \not<_L y \text{ e } y \not<_L x \\ &\iff C_x^L \not\prec C_y^L \text{ e } C_y^L \not\prec C_x^L \\ &\iff C_x^L = C_y^L. \end{aligned}$$

Quindi $\sim_L$ è transitiva. □

Daremo ora una diversa caratterizzazione di $<_L$ e $<_R$.

Lemma 6.4.4 *1. $x <_L y$ se e solo se $\exists z.\, x \sim z < y$;*

2. $x <_R y$ se e solo se $\exists z.\, x < z \sim y$.

Dimostrazione: (Dimostriamo solo 1) $\Longleftarrow$ Usando il Lemma 6.4.3, da $z < y$ otteniamo $C_z^R \prec C_y^L$. Ma $x \sim z$ implica che esiste un taglio che include sia x che z, e quindi $C_x^L \preceq C_z^R$. Così $C_x^L \prec C_y^L$ e quindi $x <_L y$.
$\Longrightarrow$ Si noti che $C_x^L \setminus C_y^L \neq \emptyset$ (se fosse $C_x^L \setminus C_y^L = \emptyset$ allora $C_x^L = C_y^L$, che contraddice $C_x^L \prec C_y^L$, oppure $C_y^L \subset C_x^L$, che contraddice il fatto che C_x^L sia un taglio). Si prenda un qualunque $z \in C_x^L \setminus C_y^L$. Naturalmente $z \sim x$; inoltre $C_z^R \prec C_y^L$, poiché altrimenti $z \in C_y^L$. Quindi $z < y$, come richiesto. □

6.5 La struttura delle linee

I risultati fin qui ottenuti ci consentono di dimostrare alcune altre interessanti proprietà della relazione $\prec$. Dimostreremo che $(\mathcal{C}_P, \prec)$ contiene un elemento minimo, ed anche uno massimo ogni volta che P contiene un elemento massimale. Ricordiamo che un elemento $x \in P$ è detto *minimale* (massimale) se e solo se non c'è nessun y tale che $y < x$ ($x < y$, rispettivamente).

Si noti che equivalentemente un elemento è minimale quando la sua altezza è zero, e la Proprietà 6.2.2 (3) si può rienunciare dicendo che esiste sempre (almeno) un elemento minimale.

Proprietà 6.5.1 *Se x e x' sono due elementi minimali, allora $C_x^L = C_{x'}^L$. Inoltre, se poniamo $C_{\min} = C_x^L$ (per un qualunque elemento minimale x), risulta che $C_{\min}$ è il minimo taglio rispetto a $\prec$.*

Dimostrazione: La prima parte è immediata: infatti, supponete per esempio che $C_x^L \prec C_{x'}^L$. Allora $x <_L x'$ e quindi, per il Lemma 6.4.4, $x \sim z < x'$ per qualche x, il che contraddice la minimalità di x'. Ora, prendiamo un qualsiasi taglio C, e supponiamo per assurdo che $C \prec C_x^L$. Sia y un elemento di C. Avremo:

$$C_y^L \preceq C \prec C_x^L \implies y <_L x$$

e quindi (Lemma 6.4.4) $y \sim z < x$ per qualche z, che contraddice la minimalità di x. □

Con la stessa tecnica, si può facilmente provare che:

Proprietà 6.5.2 *Si supponga che P contenga almeno un elemento massimale. Allora, per ogni coppia di elementi massimali x e x' risulta $C_x^R = C_{x'}^R$. Inoltre, se poniamo $C_{\max} = C_x^R$ (per ogni elemento massimale x), allora $C_{\max}$ è il massimo taglio rispetto a $\prec$.* □

Considereremo ora alcune proprietà delle linee di un semiordine fortemente noetheriano. Come al solito, definiamo la relazione di copertura $\lessdot$ nel modo seguente:

$$x \lessdot y \text{ iff } x < y \text{ e } \nexists z.\, x < z < y.$$

Naturalmente, la chiusura transitiva $\lessdot^*$ della relazione di copertura è inclusa in $<$, ma il viceversa non vale nel caso generale: per esempio, se si considera il poset $(\mathbb{Q}, <)$, la relazione di copertura è vuota ... Ciò nondimeno, nel caso di poset fortemente noetheriani le due relazioni effettivamente coincidono.

Lemma 6.5.1 *La chiusura transitiva di $\lessdot$ coincide con $<$ nel caso di un poset fortemente noetheriano*[8].

Dimostrazione: Supponiamo che $x < y$. Se $x \lessdot y$ non c'è nulla da dimostrare; altrimenti, si prenda una qualunque linea L che includa sia x che y, e si consideri:

$$A = \{z : z \in L, x \leq z \leq y\}.$$

Essendo A totalmente ordinato ed avendo un massimo, A deve per forza essere finito (poiché P è fortemente noetheriano), diciamo $A = \{x = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = y\}$. Inoltre $z_i < z_{i+1}$ sono in realtà relazioni di copertura, come si può facilmente verificare. Quindi risulta che $x \lessdot^* y$ come richiesto. □

Ora, si vede facilmente che una linea L in un poset fortemente noetheriano può essere di due tipi:

1. una sequenza della forma $L = \{x_0 \lessdot x_1 \lessdot \ldots \lessdot x_n\}$, dove x_0 sia minimale e x_n massimale;
2. una sequenza infinita della forma $L = \{x_0 \lessdot x_1 \lessdot \ldots\}$ dove x_0 sia minimale.

Si noti anche che tutte le sequenze in un certo semiordine saranno dello stesso tipo.

6.6 Connessione e K-densità

Prima di procedere oltre con il nostro trattamento formale dei semiordini, vogliamo fermarci e ritornare un momento all'esempio della Sezione 5.1. La maggior parte di noi preferirebbe una tazza di caffè con un cucchiaino di zucchero (diciamo, 5 grammi) ad una con cinque cucchiaini; però, se usiamo c_α per denotare una tazza con α grammi di zucchero, saremo sicuramente indifferenti fra c_α e $c_{\alpha+1/100}$. Quindi:

$$c_5 \sim c_{5.001} \sim c_{5.002} \sim \cdots \sim c_{24.999} \sim c_{25}$$

[8] Questa proprietà si chiama di solito "combinatorialità".

eppure c_5 *non* è indifferente da c_{25}. Possiamo passare da c_5 a c_{25} mediante una "catena di indifferenza", cioè una catena di oggetti a due a due indifferenti. Questo ci ricorda la classica nozione di continuo sviluppata in matematica; come Brouwer afferma (in una citazione di Weyl [Wey49]), parlando del continuo,

> The separateness of two places, upon moving them toward each other, slowly and in vague gradation passes over into indiscernibility.

Il fatto che ci si possa spostare da un oggetto ad un'altro da esso distinguibile mediante una catena di elementi indistinguibili è uno dei tipici paradossi del continuo (come Russell [Rus37] fa notare, *la freccia, in ogni momento della sua traiettoria, è in realtà ferma*). Ciò che è strano e peculiare, qui, è il fatto che la nostra catena di indifferenza sia finita, il che sembra andare contro il buon senso, come Borel [Bor46] afferma:

> Une ligne droite apparaît ainsi comme une suite continue de points, sans aucun vide, que l'on ne peut parcourir qu'en passant successivement par tous les points, dont le nombre est nécessairement infini, car un nombre fini de points, si grand qu'il soit, laisserait nécessairement des intervalles vides séparant ces points.

Eppure Petri [Pet96] osserva che Poincaré, Weyl, Dirac e altri hanno fatto notare come, idealmente, la matematica della teoria fisica dovrebbe essere "combinatoria", il che non deve però essere male interpretato come "discreta": in effetti, possiamo pensare a strutture matematiche discrete, o addirittura finite, che esibiscono un comportamento continuo, e Petri sostiene che quest'assunzione è *pienamente compatibile con la posizione matematica che il continuo dei numeri reali possa e debba essere scelto come [il paradigma per il continuo].* Il problema di colmare lo iato fra i modelli continui e quelli discreti è stato ampiamente studiato, conducendo ad una gerarchia di soluzioni possibili (si veda [Pet80b]).

Tornando al nostro problema di misurazione, il nostro scopo attuale è di disegnare un sistema con cui la misurazione si possa realizzare in modo continuo. In altre parole, vogliamo preparare una famiglia di misurandi di riferimento in modo tale che il potere di risoluzione dei nostri strumenti di misura venga sfruttato a pieno. Un modo per farlo consiste nell'assumere che ogni coppia di misurandi sia collegata da una catena di indifferenza, il che testimonierebbe il fatto che non esista alcun "buco" fra le misure; infatti, come Smith [Smi93] dimostra, questa è una condizione sufficiente per ottenere che un qualunque dato misurando (entro un certo intervallo) corrisponda ad almeno uno dei riferimenti.

Questa condizione sui semiordini viene chiamata connessione[9]; un poset $(P, <)$ è *connesso* se e solo se $\sim^* = P^2$ (dove $\sim^*$ denota come al solito la chiusura transitiva di $\sim$). In altre parole, esiste una catena di indifferenza fra due qualunque elementi di P, o equivalentemente lo spazio di tolleranza associato è un grafo connesso.

La connessione in un semiordine fortemente noetheriano risulta essere equivalente ad una proprietà di "continuità" nella dinamica dei tagli. In pratica, un semiordine è connesso

[9] In [Bol96] abbiamo usato invece la parola "coerenza" [coherence]; sebbene questo sia il termine usato in teoria della misurazione e nelle scienze sociali, abbiamo preferito adottare un altro nome qui, per non scontrarci con l'uso della parola "coerente" in teoria dei domini (vedi Capitolo 3).

se e solo se non accade mai di dover "saltare un buco" quando ci si sposta da un taglio al successivo, in un senso reso preciso dal seguente teorema.

Teorema 6.6.1 *Sia $(P, <)$ un semiordine fortemente noetheriano. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) P è connesso;

(ii) per ogni $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_P$

$$C_1 \prec\!\!\cdot\, C_2 \textit{ implica } C_1 \cap C_2 \neq \emptyset;$$

(iii) per ogni $n < n_P = \sup\{h(x), x \in P\}$, esiste un taglio verticale di altezza n.

Dimostrazione: (i) $\implies$ (ii) Si supponga che $C_1 \prec\!\!\cdot\, C_2$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Allora abbiamo che:

Claim:

1. se $x \in C_1$ e $x \sim^* z$ allora $C_z^R \preceq C_1$;
2. se $y \in C_2$ e $y \sim^* z$ allora $C_2 \preceq C_z^L$.

Dimostrazione del Claim: (Solo la parte 1) Per induzione sulla lunghezza della catena di indifferenza; se $x = z$ allora $C_z^R = C_1$.

Se $x \sim^* w \sim z$ allora, per ipotesi induttiva $C_w^R \preceq C_1$. Poiché $w \sim z$ si ha che $C_z^L \preceq C_w^R$. Se fosse $C_1 \prec C_z^R$ allora $C_2 \preceq C_z^R$ e quindi, essendo $C_z^L \preceq C_w^R \preceq C_1 \prec C_2 \preceq C_z^R$, avremmo $z \in C_1 \cap C_2$. Perciò $C_z^R \preceq C_1$. *C.V.D. Claim*

Ora sia $x \in C_1, y \in C_2$. Se $x \sim^* y$ allora, per il Claim, $C_y^R \preceq C_1$ e $C_2 \preceq C_x^L$ e quindi $C_y^R \prec C_x^L$. Ma $C_x^L = C_1, C_y^R = C_2$ e perciò $C_2 \prec C_1$: una contraddizione.

(ii) $\implies$ (iii) Si supponga per assurdo che non esista alcun taglio verticale di altezza $m < n_P$. Sia $C_2 = P^{m+1}$; naturalmente C_2 non è vuoto (essendo $m + 1 \leq n_P$) ed inoltre C_2 è un taglio: se ci fosse uno $z \notin C_2$ tale che z sia inconfrontabile con qualunque elemento di C_2, allora $h(z) = m$ e troveremmo un taglio verticale di altezza m. Ora sia C_1 un qualsiasi taglio che estenda P^m (ne esiste uno solo, effettivamente). Essendo C_2 il primo taglio di altezza $m + 1$, abbiamo $C_1 \prec\!\!\cdot\, C_2$; ma $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, il che contraddice (ii).

(iii) $\implies$ (i) Se (iii) vale, per ogni $n < n_P$ esistono due elementi $x_n, y_n \in P$ tali che $h(x_n) = n, h(y_n) = n + 1$ e $x_n \sim y_n$. Siano $x, y \in P$ con $h(x) = p \leq h(y) = q$, e si consideri la sequenza $x, x_p, y_p, \ldots, x_{q-1}, y_{q-1}, y$. Usando l'ipotesi, si ha che questa è una catena d'indifferenza (finita). □

Abbiamo introdotto la connessione come una proprietà desiderabile del nostro sistema di misurazione, e abbiamo mostrato come questa sia equivalente ad una proprietà di continuità nella struttura dei tagli. La Fig. 6.8 (a) mostra un semiordine non connesso con un "buco" fra due tagli successivi (infatti $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$); in Fig. 6.8 (b) non abbiamo buchi (infatti $\{x, z\} \prec\!\!\cdot\, \{z, y\}$ e $\{x, z\} \cap \{z, y\} = \{z\}$), ed il semiordine è perciò connesso, come si verifica facilmente.

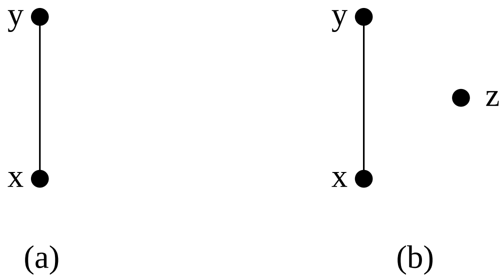


Figura 6.8: (a) Un semiordine disconnesso e (b) uno connesso

Anche se tutti concordano sulla necessità di una nozione come la connessione perché un semiordine sia "continuo", è difficile pensare che la connessione da sola basti per avere tutte le proprietà desiderabili di un continuo trasferite in un ambito discreto. Un'altro requisito minimale è quello noto come K-densità [Smi93, Pet96], un termine coniato da Petri durante i suoi studi sui processi concorrenti.

Per motivare la K-densità come una proprietà cruciale delle strutture continue, vogliamo richiamare brevemente il lavoro di Carnap sull'assiomatizzazione della topologia dello spazio-tempo [Car58].

Carnap sviluppa un sistema di assiomi per trattare il moto di particelle fisiche (idealizzate, prive di estensione); prende come individui i momenti delle particelle (detti *world-point*) ognuno assegnato ad un punto nello spazio-tempo. L'insieme di tutti i world-point di una particella è chiamato *world-line*, ed è totalmente ordinato mediante una relazione che viene interpretata come "accadere prima di", un *ordine temporale locale*. Per tener conto delle interazioni fra particelle, si definisce una relazione di *coincidenza* fra world-point: due world-point coincidono quando sono assegnati alla stessa posizione nello spazio-tempo.

Questa, insieme all'ordine locale sulle world-line, induce un ordine parziale S sull'insieme dei world-point, che può essere interpretato come la possibilità che un certo effetto raggiunga un world-point a partire da un altro. Ora, in quest'ordine parziale la relazione di inconfrontabilità I determina la simultaneità di world-point, nel senso di Reichenbach, che definisce due world-point simultanei se e solo se nessun segnale può andare da uno all'altro.

Ora, un'anticatena massimale (taglio, nella nostra terminologia) di S è ciò che Carnap chiama uno spazio, "una sezione tridimensionale dello spazio-tempo quadridimensionale fatta lungo la direzione del tempo" [Car58]. Similmente, una catena massimale (linea) di S è una linea di segnalazione nel senso di Carnap, e determina l'evoluzione di un processo nello spazio-tempo. Ciò che si dovrebbe richiedere affinché il tempo sia continuo è che ogni singola particella sia da qualche parte in ciascun momento, che si formalizza con l'assunzione che ogni linea di segnalazione intersechi ogni spazio in (esattamente) un punto[10].

Questa proprietà è nota come K-densità; più formalmente, un poset $(P, <)$ è *K-denso* se e solo se

$$\forall L \in \mathcal{L}_P \forall C \in \mathcal{C}_P.\, L \cap C \neq \emptyset.$$

[10]Questo è l'assioma 48.D6 di [Car58].

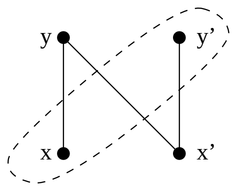


Figura 6.9: Un poset a forma di N (la linea obliqua è una relazione di copertura)

Per quanto riguarda la misurazione, la K-densità è una proprietà connessa con la granularità dell'insieme dei misurandi di riferimento [Smi93]. I poset K-densi (noti anche come poset completi per catene ed anticatene) sono anche un soggetto molto studiato nella teoria combinatoria degli ordini [Gri69, LM73, EZZ86, Riv86].

Si può dare una caratterizzazione interessante della K-densità nel caso di semiordini fortemente noetheriani: risulta che i semiordini K-densi sono precisamente quelli in cui la relazione di copertura si riflette nell'ordinamento fra i tagli.

Teorema 6.6.2 *Sia $(P, <)$ un semiordine fortemente noetheriano. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) P è K-denso;

(ii) per ogni $x, y \in P$, $x \lessdot y$ implica $C_x^R \prec\!\!\cdot\, C_y^L$.

Dimostrazione: (i) $\implies$ (ii) Si supponga che $x \lessdot y$ e $C_x^R \prec C \prec C_y^L$. Sia ora L una qualsiasi linea con $x, y \in L$; l'insieme dei tagli che sono intersecati da L è:

$$T = \cup_{w \in L}[C_w^L, C_w^R]$$

dove $[C_1, C_2] = \{C : C_1 \preceq C \preceq C_2\}$. P è K-denso, e quindi $T = \mathcal{C}_P$; in particolare $C \in T$, cioè esiste uno $z \in L$ tale che $C_z^L \preceq C \preceq C_z^R$. Se avessimo $C_x^R \prec C_z^L$ e $C_z^R \prec C_y^L$, allora avremmo $x < z < y$, che contraddice $x \lessdot y$. Allora deve essere:

$$C_z^L \preceq C_x^R \text{ o } C_y^L \preceq C_z^R.$$

Ma $C_z^L \preceq C_x^R \prec C \preceq C_z^R$ implica che $x \sim z$, e l'altro caso similmente comporta che $y \sim z$: entrambi i casi sono impossibili, essendo L una linea.
(ii) $\implies$ (i) Immediato, per la caratterizzazione delle linee in un poset fortemente noetheriano. □

Il precedente risultato ci permette di ottenere una condizione locale che è equivalente alla K-densità nei semiordini fortemente noetheriani. Se $(P, <)$ è un poset, una N di P è una quadrupla $x, y, x', y' \in P$ tale che $x \lessdot y, x < x', y' < y$ e nessun'altra coppia è confrontabile; il poset più semplice che contiene una N è quello rappresentato in Fig. 6.9, il che spiega il nome "N".

Il taglio formato dagli elementi cerchiati non interseca la linea $\{x', y\}$. La seguente proprietà, che è un corollario del precedente teorema, afferma che l'assenza di N è equivalente alla K-densità nel caso di semiordini fortemente noetheriani.

Proprietà 6.6.1 *Un semiordine fortemente noetheriano è K-denso se e solo se è privo di N.*

Dimostrazione: Si supponga che $(P, <)$ *non* sia K-denso: troveremo una N in P. Usando il Teorema 6.6.2, ci sono $x, y \in P$ tali che $x \lessdot y$ e $C_x^R \prec C \prec C_y^L$ per qualche C. Ora $x, y \notin C$ e quindi esistono $x', y' \in C$ tali che $x \not\sim x', y \not\sim y'$, e naturalmente avremo $x < x', y' < y$. Inoltre $x' \sim y'$ (poiché x', y' stanno nello stesso taglio). Inoltre $x' \sim y$ (se $x' \not\sim y$, allora $x' < y$ che a sua volta implica $x < x' < y$, contraddicendo $x \lessdot y$) e similmente $x \sim y'$. Dunque x, y, x', y' è una N di P. $\square$

Capitolo 7

Conclusioni e lavori futuri

La motivazione originale di questo lavoro era una ricostruzione “dal basso” dell'assiomatizzazione di Petri per la concorrenza. Tale processo di ricostruzione presupponeva necessariamente la comprensione dei meccanismi che stanno alla base della teoria di Petri della concorrenza, con particolare attenzione alle relazioni fra i diversi àmbiti in cui gli spazi di tolleranza compaiono. Riteniamo che la Tesi abbia in parte chiarito alcune di queste relazioni, specie per quanto concerne diverse “teorie dell'approssimazione” (sia dal punto di vista della teoria dei domini, sia da quello topologico).

Chiaramente, i risultati presentati qui possono essere considerati solo un passo verso questo obiettivo. Ecco alcune direzioni di ricerca che rimangono aperte, e che sono attualmente in corso di analisi.

- *Costruzioni universali.* Pensiamo che le tecniche generali usate qui per dare una costruzione deterministica esplicita per molti tipi di rappresentazioni (Sezione 4.3) possano essere ulteriormente generalizzate, per esempio al fine di ottenere una struttura di eventi generale universale omogenea (sebbene, in quel caso, il dominio associato non possa essere omogeneo, a causa dei risultati negativi di [DG93]). Lo stesso si può fare anche per le costruzioni probabilistiche della Sezione 4.6. Un'interessante questione aperta connessa alle costruzioni universali è se il dominio dI universale (coerente) ottenuto nel Corollario 4.3.4 (Teorema 4.5.5, rispettivamente) sia omogeneo; se la risposta a questa domanda fosse negativa, avrebbe senso chiedersi se sia possibile usare le stesse tecniche numeriche per ottenere *direttamente* un dominio omogeneo, invece di lavorare sulle rappresentazioni.
  Una domanda importante, probabilmente di difficile soluzione, è se sia possibile avere opportune costruzioni universali anche per alcune sottocategorie piene di **TolSp**, per esempio, per la sottocategoria di tutti gli spazi di tolleranza indotti da ordini parziali (ordini di intervallo, semiordini …). Questo problema richiederà probabilmente alcune tecniche nuove, perché quelle categorie non sono più algebroidali, e quindi la saturazione non si può applicare (almeno, non in modo diretto).

- *Tecniche di approssimazione.* L'idea di approssimare spazi topologici usando due limiti inversi (uno nella categoria degli spazi di tolleranza, e l'altro nella categoria degli spazi topologici) è ancora in fase germinale. Riteniamo che la si possa sviluppare in modo più sistematico, ma allo stato attuale è solo applicabile su alcuni esempi, sebbene i risultati ottenuti fin qui siano promettenti. Pensiamo anche che possa essere utile confrontare questo approccio con altri simili proposti in letteratura (si veda, ad esempio, [Smy92],[Sün95]), con lo scopo di raffinare le costruzioni. Inoltre, potrebbe essere interessante un confronto con [Smy95], sebbene i risultati di quell'articolo siano collocati in un ambito diverso, e questo renda difficile apprezzare le somiglianze con quelli ottenuti da noi.

- *Dualità di Stone e sequenze di approssimazione.* Un interessante problema aperto è la caratterizzazione di quegli spazi topologici che sono (omeomorfi a) limiti ridotti di sequenze di approssimazione di spazi di tolleranza finiti discretamente topologizzati (abbiamo presentato alcuni esempi di tali spazi nelle Sezioni 5.7, 5.8 e 5.9). Una chiave per risolvere questo problema è offerta dalla ben nota dualità di Stone, che si può esprimere (come Smyth suggerisce [Smy92][Proposition 5.0.18]) come segue: uno spazio second-countable è uno spazio di Stone se e solo se è il limite inverso (nella categoria **Top**) di una sequenza di spazi discreti finiti. Quindi, gli spazi approssimabili sono semplicemente "speciali" quozienti di spazi di Stone second-countable. Un problema aperto correlato è caratterizzare gli spazi topologici che si possano ottenere come limiti di una sequenza di approssimazione effettivamente presentata. Questa domanda è chiaramente centrale se si intendono applicare i nostri risultati ad un ambito computazionale.

- *Generalizzazioni dei semiordini.* Lo studio degli spazi di tolleranza indotti da semiordini sembra essere generalizzabile in vari modi, per esempio considerando tipi diversi di ordini (che vanno dagli n-semiordini [Bog82], agli ordini d'intervallo [Fis85], fino ai più generali ordini parziali); probabilmente, questo darebbe luogo a caratterizzazioni interessanti delle catene ed anticatene (clique ed insiemi indipendenti) per un'ampia classe di spazi di tolleranza indotti da ordini parziali.

- *Applicazioni alla teoria della concorrenza.* Un altro serio limite dei semiordini è che molti poset che si presentano nella teoria della fisica e del controllo, e che possono essere usati per denotare scale di misurazione, non sono semiordini. Due esempi sono rappresentati dai cosiddetti *time orthoids* (definiti da Petri [Pet96]), che si possono usare come immagine concreta del comportamento di un clock, e dal continuo combinatorio con soli punti interni, definito in [PS87]. Inoltre, se si vogliono applicare risultati combinatori alla teoria del controllo e della concorrenza, la nozione di poset è troppo restrittiva perché non permette di tenere conto della ciclicità. In tal caso, si dovrebbero considerare strutture cicliche come quelle definite in [Pet80a]: una struttura ciclica è definita mediante una relazione quaternaria di separazione, simile a quelle usate in geometria proiettiva. Una generalizzazione in questa direzione dei risultati ottenuti nel Capitolo 6 sarebbe auspicabile, anche se richiederebbe una più precisa comprensione delle relazioni esistenti fra ordini ciclici e poset.

Infine, da un punto di vista più filosofico, siamo interessati ad approfondire il tema di questa tesi per raggiungere una comprensione più completa delle idee di Petri sui modelli finiti dei fenomeni continui, forse anche alla luce dei contributi di A.W. Holt [Hol80, Hol74b, Hol74a].

Appendice A

Prerequisiti

A.1 Teoria delle categorie

Introduciamo qui le nozioni fondamentali di teoria delle categorie che sono state usate in questa Tesi; nella maggior parte dei casi si tratta di definizioni standard, che possono essere trovate in qualsiasi testo di categorie, come ad esempio [Mac71].
Una *categoria* $\mathcal{C}$ è definita dai seguenti dati:

- una classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ di *oggetti*;
- una classe $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ di *frecce* (o morfismi);
- due funzioni $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ che forniscono, per ogni freccia f di $\mathcal{C}$, due oggetti, chiamati rispettivamente *dominio* e *codominio* di f; scriviamo $f : A \to_{\mathcal{C}} B$ per indicare che f è una freccia di $\mathcal{C}$ avente dominio A e codominio B (il pedice viene omesso ogni volta che è possibile dedurre la categoria dal contesto);
- una composizione parziale $\circ : \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ che soddisfa i seguenti vincoli: $f \circ g$ è definita se e solo se $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f)$; inoltre, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ogni volta che entrambi i membri siano definiti;
- per ogni $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ esiste una freccia $\mathbf{1}_A : A \to_{\mathcal{C}} A$ tale che, per ogni freccia f (g) di $\mathcal{C}$ avente dominio (codominio) A vale che $f \circ \mathbf{1}_A = f$ $(\mathbf{1}_A \circ g = g)$.

Esistono molti esempi di categorie; eccone alcuni:

- **Set**: la categoria i cui oggetti sono gli insiemi, e le frecce sono le funzioni, e dove la composizione sia interpretata come l'usuale composizione di funzioni;
- **Mon**: la categoria dei monoidi, avente come frecce i morfismi di monoidi, e con l'usuale composizione di funzioni;
- **Top**: la categoria degli spazi topologici, con le funzioni continue come frecce.

Tutte le categorie sopra indicate sono *grandi*, nel senso che la loro classe di oggetti è una classe propria e non un insieme; in molti altri casi, sia gli oggetti che le frecce costituiscono un insieme, ed allora parliamo di categorie *piccole*. Per esempio, ogni insieme preordinato

P, con preordine $\sqsubseteq$, si può vedere come una categoria piccola i cui oggetti sono semplicemente gli elementi di P, e con una freccia da A a B se e solo se $A \sqsubseteq B$. Un oggetto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ viene detto *debolmente iniziale* se e solo se per ogni oggetto B esiste una freccia da A ad B. Chiaramente, nel caso di una categoria che rappresenta un poset, un oggetto debolmente iniziale[1] è semplicemente il minimo.

Per ogni due oggetti $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, indichiamo con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ la classe delle frecce da A a B. Una *sottocategoria* di $\mathcal{C}$ è una categoria $\mathcal{D}$ i cui oggetti (frecce) sono una sottoclasse di quelli(e) di $\mathcal{C}$, con dominio, codominio, composizioni e identità definite restringendo i dati corrispondenti di $\mathcal{C}$. Diremo che la sottocategoria è *piena* se, per ogni $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ si ha $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (cioè, se vediamo la categoria semplicemente come un grafo orientato, $\mathcal{D}$ deve essere un sottografo indotto di $\mathcal{C}$). Una freccia $f : A \to_{\mathcal{C}} B$ è

- un *isomorfismo* se esiste una freccia $g : B \to_{\mathcal{C}} A$ tale che $g \circ f = \mathbf{1}_A$ e $f \circ g = \mathbf{1}_B$; in questo caso, diremo che A e B sono isomorfe, e scriveremo $A \cong B$;

- un *mono* (o una freccia monica) se, per ogni due frecce $g, h : C \to_{\mathcal{C}} A$, se $f \circ g = f \circ h$ allora $g = h$;

- un *epi* se, per ogni due frecce $g, h : B \to_{\mathcal{C}} C$, se $g \circ f = h \circ f$ allora $g = h$.

Lo *scheletro* di $\mathcal{C}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di oggetti di $\mathcal{C}$ a meno di isomorfismo, cioè $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})/\cong$.

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie; un *funtore* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ manda oggetti di $\mathcal{C}$ in oggetti di $\mathcal{D}$, e frecce di $\mathcal{C}$ in frecce di $\mathcal{D}$, in modo tale che:

- per ogni $f \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ si abbia $\mathrm{dom}(F(f)) = F(\mathrm{dom}(f))$ e $\mathrm{cod}(F(f)) = F(\mathrm{cod}(f))$;

- per tutti gli $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ si abbia $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$;

- se $f : A \to_{\mathcal{C}} B$ e $g : B \to_{\mathcal{C}} C$ allora $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

In particolare, per ogni categoria $\mathcal{C}$, si può definire il *funtore identità* $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ che agisce come l'identità sia sugli oggetti che sulle frecce. Naturalmente possiamo comporre funtori componendo le loro due parti (quella che opera sugli oggetti e quella che opera sulle frecce) separatamente; in tal modo otteniamo una categoria (grande), i cui oggetti sono tutte le categorie piccole, e le cui frecce sono i funtori, con la composizione appena definita (questa categoria si indica solitamente con **Cat**).

Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è detto *pieno* se e solo se per ogni coppia $c, c' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e ogni freccia $g : F(c) \to_{\mathcal{D}} F(c')$, esiste una freccia $f : c \to_{\mathcal{C}} c'$ tale che $g = F(f)$. È *fedele* se e solo se per ogni coppia $c, c' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e per ogni scelta delle frecce $f, g : c \to_{\mathcal{C}} c'$, se $F(f) = F(g)$ allora $f = g$.

Siano ora $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ due funtori; una *trasformazione naturale* $\tau : F \dot{\to} G$ è una funzione che assegna, ad ogni oggetto c di $\mathcal{C}$, una freccia $\tau_c : F(c) \to_{\mathcal{D}} G(c)$ tale che, per

[1] In questo caso si tratta in realtà di un oggetto iniziale.

ogni freccia $f : c \to_{\mathcal{C}} c'$, il seguente diagramma è commutativo[2]:

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{\tau_c} & G(c) \\ {\scriptstyle F(f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(c') & \xrightarrow{\tau_{c'}} & G(c') \end{array}$$

Le frecce di $\mathcal{D}$ che sono nell'immagine di τ vengono chiamate le *componenti* della trasformazione; diremo che la trasformazione è un *isomorfismo naturale*, e scriveremo $\tau : F \dot{\cong} G$, o più semplicemente $F \dot{\cong} G$, se ogni componente è un isomorfismo.

Date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, diremo che esse sono *equivalenti* se esistono due funtori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tali che $G \circ F \dot{\cong} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \dot{\cong} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$. È un risultato ben noto che

Osservazione A.1.1 *Sia Φ una proposizione che si possa esprimere usando solo nozioni categoriali; se Φ vale per la categoria $\mathcal{C}$, e se $\mathcal{D}$ è equivalente a $\mathcal{C}$, allora la proposizione vale anche per $\mathcal{D}$. Inoltre, se la proposizione implica l'esistenza di un oggetto (freccia) A (f, risp.) di $\mathcal{C}$ che soddisfi certe proprietà, e se l'equivalenza fra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ è data dai due funtori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, allora $F(A)$ ($F(f)$, risp.) è un oggetto (freccia, risp.) di $\mathcal{D}$ che soddisfa le stesse proprietà.*

Questa osservazione è stata usata implicitamente nella dimostrazione di esistenza del dominio dI (atomico, coerente) omogeneo, nel Capitolo 4. Il seguente ben noto risultato viene spesso utilizzato per dimostrare l'equivalenza di due categorie:

Teorema A.1.1 (MacLane [Mac71], Theorem IV.4.1) *Le seguenti proprietà di un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sono equivalenti:*

1. *F è un'equivalenza categoriale;*

2. *F è pieno e fedele, e ogni oggetto $d \in Obj(\mathcal{D})$ è isomorfo a $F(c)$ per qualche oggetto c di $\mathcal{C}$.* □

Un'ω-*catena* [DG93] in una categoria $\mathcal{C}$ è una sequenza[3] $(A_i, f_i)_{i \in \omega}$ dove ogni A_i è un oggetto di $\mathcal{C}$, e $f_i : A_i \to_{\mathcal{C}} A_{i+1}$ è una freccia di $\mathcal{C}$. Il *colimite* (o limite diretto) di tale catena è dato da un oggetto A e da una sequenza di frecce $\psi_i : A_i \to_{\mathcal{C}} A$, tali che

1. per ogni $i \in \omega$ valga che $f_i \circ \psi_i = \psi_{i+1}$ (una sequenza che soddisfi questa proprietà viene di solito chiamata un *cono*);

2. se B è un oggetto di $\mathcal{C}$ con un cono $\phi_i : A_i \to_{\mathcal{C}}$, esiste un unica freccia $h : A \to B$ tale che $h \circ \phi_i = \psi_i$.

[2] Ciò significa che, per ogni due cammini nel diagramma che abbiano lo stesso nodo di partenza e lo stesso nodo finale, le frecce ottenute per composizione sui due cammini sono uguali.

[3] O, equivalentemente, un funtore $F : \omega \to \mathcal{C}$, dove ω è considerato come il (la rappresentazione categoriale del) poset dei numeri naturali.

La prima parte di questa definizione può essere schematicamente rappresentata come nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"'] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dl, "\psi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[dll, "\psi_2"] & A_3 \cdots \\
A & & &
\end{tikzcd}$$

È ovvio che il colimite è unico a meno di isomorfismi, se esiste, e scriviamo $A = \varinjlim(A_i, f_i)$. Se $\mathcal{C}$ rappresenta (la versione categoriale di) un insieme parzialmente ordinato, un'ω-catena può essere vista semplicemente come una catena ascendente numerabile, e il suo colimite (se esiste) è l'estremo superiore della catena.

Viceversa, un ω-*cocatena* in una categoria $\mathcal{C}$ è una sequenza[4] $(A_i, f_i)_{i\in\omega}$ dove ogni A_i è un oggetto di $\mathcal{C}$, e $f_i : A_{i+1} \to_{\mathcal{C}} A_i$ è una freccia di $\mathcal{C}$. Il *limite* (o limite inverso) di tale catena è dato da un oggetto A e una sequenza di frecce (chiamata il *cono*) $\psi_i : A \to_{\mathcal{C}} A_i$, tale che

1. per ogni $i \in \omega$ si ha $f_i \circ \psi_{i+1} = \psi_i$;
2. se B è un oggetto di $\mathcal{C}$, e $\phi_i : B \to_{\mathcal{C}} A_i$ è un cono che soddisfa la precedente proposizione, allora esiste un unica freccia $h : B \to A$ tale che $\psi_i \circ h = \phi_i$.

Anche in questo caso, il limite è unico a meno di isomorfismi, se esiste, e scriviamo $A = \varprojlim(A_i, f_i)$. Nel caso dei poset, una ω-cocatena è una catena discendente numerabile, e il suo limite è l'estremo inferiore.

Un oggetto B in una categoria $\mathcal{C}$ è *finito* (secondo [DG93]) se, ogni volta che $(A_i, f_i)_{i\in\omega}$ è un'ω-catena con $\varinjlim(A_i, f_i) = A$ e con cono $\psi_i : A_i \to A$, e $g : B \to A$ è una freccia, esiste un indice n per cui ci sia un'unica freccia $h : B \to A_n$ che soddisfi $g = \psi_n \circ h$. In un diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"'] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dl, "\psi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[dll, "\psi_2"] & A_3 & \cdots & A_n \arrow[dlllll, "\psi_n"'] & \cdots \\
A & & & & & & \\
B \arrow[u, "g"'] \arrow[uurrrrr, "\exists! h"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

La sottocategoria piena degli oggetti finiti viene indicata con $\mathcal{C}_f$.

A.2 Teoria della misura

Introduciamo qui le nozioni fondamentali di teoria della misura (astratta) che sono state utilizzate in questa Tesi; la notazione e le definizioni sono standard, e rimandiamo il lettore a [Doo94] per maggiori dettagli su questi argomenti.

Una famiglia $\mathbb{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X è chiamata σ-*algebra* su X se soddisfa i seguenti assiomi:

[4] O, equivalentemente, un funtore $F : \omega^{op} \to \mathcal{C}$, dove ω^{op} è come ω ma con tutte le frecce invertite.

1. $X \in \mathbb{A}$;
2. se $M \in \mathbb{A}$ allora anche $M^C \in \mathbb{A}$ (dove il complemento è preso rispetto all'intero insieme X);
3. se $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ è un insieme numerabile, allora $\cup\mathbb{S} \in \mathbb{A}$.

In altre parole, una σ-algebra contiene l'intero insieme X, ed è chiusa rispetto all'operazione di complemento e alle unioni numerabili. La coppia $(X, \mathbb{A})$ viene spesso chiamata *spazio di misura*, e gli elementi di $\mathbb{A}$ vengono detti *insiemi misurabili.*

Ecco alcune proprietà di uno spazio di misura $(X, \mathbb{A})$:

- l'insieme vuoto è misurabile, cioè $\emptyset \in \mathbb{A}$;
- $\mathbb{A}$ è chiuso rispetto alle unioni e alle intersezioni (finite e) numberabili; cioè, se $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ è (finito o) numerabile, allora $\cup\mathbb{S} \in \mathbb{A}$ e $\cap\mathbb{S} \in \mathbb{A}$;
- $\mathbb{A}$ è chiuso rispetto alla differenza insiemistica (cioè, se $M_1, M_2 \in \mathbb{A}$ allora anche $M_1 \setminus M_2 \in \mathbb{A}$).

Due insiemi misurabili $M_1, M_2 \in \mathbb{A}$ sono *ortogonali* se e solo se $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. La seguente proprietà indica che ogni limite numerabile di insiemi misurabili può essere espresso come limite di insiemi misurabili a due a due ortogonali.

Proprietà A.2.1 *Sia $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ una sequenza di insiemi misurabili nello spazio di misura $(X, \mathbb{A})$. Allora esiste una sequenza $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ di misurabili tali che*

- $\cup_{n\in\omega} A_n = \cup_{n\in\omega} B_n$*;*
- *per ogni $n \in \omega$ si ha $B_n \subseteq A_n$;*
- *per ogni $n, m \in \omega$ $(n \neq m)$ gli insiemi B_n e B_m sono ortogonali.*

Dimostrazione: (Traccia) Si prenda $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. □

Quella che segue è una semplice ma importante proprietà delle σ-algebre:

Lemma A.2.1 *Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto di σ-algebre su X. Allora $\cap\mathcal{A}$ è una σ-algebra su X.* □

Come conseguenza, otteniamo:

Corollario A.2.1 *Sia $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ un insieme di sottoinsiemi di X; allora, esiste una σ-algebra $\mathbb{A}_\mathcal{F}$ su X tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}_\mathcal{F}$ e inoltre, se $\mathbb{A}$ è una σ-algebra su X tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}$, allora anche $\mathbb{A}_\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}$.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A} = \{\mathbb{A} : \mathbb{A}$ è una σ-algebra su X, e $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}\}$ e si definisca $\mathbb{A}_\mathcal{F} = \cap\mathcal{A}$. Questa è ancora una σ-algebra, per il Lemma A.2.1. □

La σ-algebra $\mathbb{A}_\mathcal{F}$ viene chiamata la "σ-algebra generata da $\mathcal{F}$", ed è in pratica la minima σ-algebra che contenga tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ come insiemi misurabili.

Una *misura* (positiva) su uno spazio di misura $(X, \mathbb{A})$ è una funzione $\mu : \mathbb{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che

1. per ogni $M \in \mathbb{A}$, $\mu(M) \geq 0$;
2. se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ è una sequenza di insiemi misurabili a due a due ortogonali, allora
$$\mu(\cup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n);$$
3. esiste un $M \in \mathbb{A}$ tale che $\mu(M) < \infty$.

Diremo che μ è *normalizzata* (oppure, "una misura di probabilità") se e solo se $\mu(X) = 1$. La seguente proposizione elenca le principali proprietà di una funzione di misura:

Proposizione A.2.1 *Sia $(X, \mathbb{A})$ uno spazio di misura, con misura μ. Allora*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. *se $M_1, M_2 \in \mathbb{A}$ e $M_1 \subseteq M_2$, allora $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$;*
3. *se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ è una sequenza di insiemi misurabili, allora*
$$\mu(\cup_{n\in\omega} A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(A_n);$$
4. *se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ è una sequenza di insiemi misurabili con $A_n \subseteq A_{n+1}$, allora*
$$\mu(\cup_{n\in\omega} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n);$$
5. *se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ è una sequenza di insiemi misurabili con $A_{n+1} \subseteq A_n$, allora*
$$\mu(\cap_{n\in\omega} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n);$$
6. *se μ è normalizzata, e $M \in \mathbb{A}$, allora $\mu(M^C) = 1 - \mu(M)$;*
7. *se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ è una sequenza di insiemi misurabili con $\mu(A_n) = 0$ per ogni $n \in \omega$, allora anche $\mu(\cup_{n\in\omega} A_n) = 0$; cioè, l'unione numerabile di insiemi di misura zero ha misura zero.*

Dimostrazione: Si veda [Doo94]. □

Un ultimo punto che merita di essere spiegato è l'indipendenza. Se μ è una misura (normalizzata) su $(X, \mathbb{A})$, e $A, B \in \mathbb{A}$, diremo che A, B sono (μ)-*indipendenti* se e solo se $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

A.3 Topologia generale

Introduciamo qui gli elementi fondamentali di topologia generale utilizzati in questa Tesi; alcuni altri argomenti più specifici sono stati introdotti direttamente nel testo. Per maggiori informazioni su questo soggetto, rinviamo il lettore interessato a [Gaa64].

Una *topologia* su un insieme X è una famiglia $\Omega \subseteq \wp(X)$ di sottoinsiemi di X tale che

1. $\emptyset \in \Omega$ e $X \in \Omega$;

2. se $O_1, O_2 \in \Omega$, allora anche $O_1 \cap O_2 \in \Omega$;

3. se $\langle O_i \in \Omega \rangle_{i \in I}$, allora anche $\cup_{i \in I} O_i \in \Omega$.

In altri termini, una topologia è una famiglia di sottoinsiemi che contiene l'insieme vuoto, l'insieme totale (universo), ed è chiusa rispetto a intersezioni finite e unioni arbitrarie. Gli elementi di Ω sono chiamati *(insiemi) aperti* e la coppia (X, Ω) viene spesso denominata *spazio topologico*. Di solito, parlando di uno spazio topologico (X, Ω), useremo semplicemente la lettera X e lasceremo la topologia Ω sottintesa (a meno che non possano insorgere confusioni).

Si noti che è possibile ordinare le topologie su un insieme X per inclusione insiemistica; se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ sono due topologie su X, spesso diremo che Ω_1 è più *debole* (o rozza) di Ω_2, e che Ω_2 è più *forte* (o fine) di Ω_1. Chiaramente, c'è una topologia più debole di tutte le altre, cioè $\{\emptyset, X\}$ (detta topologia *indiscreta*, o non discreta), e una topologia più forte di tutte le altre, cioè $\wp(X)$ (chiamata topologia *discreta*).

Un insieme $C \subseteq X$ è detto *chiuso* se e solo se il suo complemento C^C è aperto. Si noti che $\emptyset, X$ sono insiemi chiusi, e che l'unione finita e l'intersezione arbitraria di insiemi chiusi è ancora chiusa. Un insieme che sia aperto e chiuso è chiamato talvolta *chiusaperto* ($\emptyset$ e X sono i chiusaperti banali).

Ecco alcune definizioni fondamentali di topologia generale; sia (X, Ω) uno spazio topologico, e $A \subseteq X$:

- l'*interno* di A è il più grande insieme aperto contenuto in A, cioè
$$\mathrm{Int}(A) = \cup\{O \in \Omega : O \subseteq A\};$$

- la *chiusura* di A è il più piccolo insieme chiuso contenente A, cioè
$$\overline{A} = \cap\{C : A \subseteq C, C^C \in \Omega\};$$

- il *bordo* di A è l'insieme dei punti che sono contenuti nella chiusura di A ma non nel suo interno, cioè
$$\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A);$$

- l'*esterno* di A è l'interno del suo complemento, cioè $\mathrm{Ext}(A) = \mathrm{Int}(A^C)$;

- un punto $x \in X$ è un *punto di accumulazione* di A se e solo se ogni insieme aperto contenente x contiene almeno un punto di A diverso da x; l'insieme di tutti i punti di accumulazione di A (spesso chiamato l'"insieme derivato") è indicato con ∂A.

Un modo comune per determinare una topologia su un insieme è il seguente. Sia $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che:

1. per ogni $x \in X$, c'è un $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$;

2. se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, allora c'è un $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

La famiglia $\mathcal{B}$ è detta essere una *base* (se soddisfa solo l'assioma (1) si parla di *sottobase*).

Allora, sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi di X che sono unioni di elementi di $\mathcal{B}$: questa è effettivamente una topologia su X, chiamata "topologia generata dalla base $\mathcal{B}$". È in effetti la più debole topologia che includa $\mathcal{B}$. Nel caso di una sottobase, dobbiamo considerare prima la base ottenuta prendendo le intersezioni finite degli elementi della sottobase, e poi generare la topologia da questa base.

Usare le (sotto)basi per definire topologie è un modo molto utile per descrivere spazi topologici. Un esempio importante è il seguente: per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, sia (a, b) l'intervallo aperto avente a e b come estremi (cioè l'insieme $\{r \in \mathbb{R} : a < r < b\}$). La famiglia di tutti gli intervalli di questo tipo forma una base, e la topologia generata su $\mathbb{R}$ è chiamata *topologia euclidea (o standard)* di $\mathbb{R}$.

Ecco una condizione necessaria e sufficiente affinché due basi generino la stessa topologia:

Teorema A.3.1 (Gaal [Gaa64], Theorem I.4.1) *Sia X un insieme, e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ due basi su X. Sia inoltre Ω_i la topologia generata da $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$. Allora Ω_1 è più forte di Ω_2 se e solo se, per ogni $B_2 \in \mathcal{B}_2$ ed ogni $x \in B_2$, esiste un $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tale che $x \in B_1 \subseteq B_2$.* □

In particolare, osservate che Ω_1 è più forte di Ω_2 ogniqualvolta si abbia $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$.

Dato uno spazio topologico (X, Ω), si prenda un sottoinsieme $Y \subseteq X$; l'insieme $\Omega_Y = \{O \cap Y : O \in \Omega\}$ dà una topologia su Y, chiamata *topologia di sottospazio* indotta da Ω su Y.

Una funzione $f : (X, \Omega) \to (X', \Omega')$ è chiamata *aperta* (chiusa) se e solo se l'immagine di ogni aperto (chiuso, risp.) è ancora un aperto (chiuso, risp.). È (topologicamente) *continua* se e solo se la controimmagine di ogni aperto è un aperto (cioè, per ogni $O' \in \Omega'$ si ha $f^{-1}(O') \in \Omega$). In particolare, una biiezione che sia continua e abbia inversa continua viene chiamata un *omeomorfismo*.

Il seguente Lemma viene spesso usato per provare che una certa funzione è continua:

Lemma A.3.1 (Gaal [Gaa64], Exercise IV.3.1) *Sia $f : X \to X'$ una funzione fra spazi topologici, e $\mathcal{S}$ una sottobase per la topologia Ω'. Se $f^{-1}(S)$ è aperto per tutti gli $S \in \mathcal{S}$, allora f è continua.* □

Richiamiamo infine la definizione di spazio metrico. Una *pseudometrica* su un insieme X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ (l'insieme dei reali non negativi) tale che

1. per ogni $x \in X$, $d(x, x) = 0$;

2. per ogni $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

3. per ogni $x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (la *disuguaglianza triangolare*).

Diciamo che d è una *metrica* se inoltre $d(x, y) = 0$ implica sempre $x = y$. Infine, d è un'*ultrametrica* se è una metrica e soddisfa una versione più forte della disuguaglianza triangolare, cioè

$$\forall x, y, z \in X.\ \max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z).$$

Uno *spazio (pseudo,ultra)metrico* è un insieme X dotato di una (pseudo,ultra)metrica d. Dato uno spazio pseudometrico (X, d), per ogni $x \in X$ fissato e ogni $\epsilon > 0$, si può considerare la *sfera aperta di centro x e raggio ϵ* definita prendendo

$$\mathcal{B}_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

L'insieme $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0\}$ è una sottobase per una topologia Ω_d su X, chiamata *topologia indotta dalla metrica d*.

In particolare, è facile vedere che

- un insieme $A \subseteq X$ è aperto se e solo se, per ogni $x \in A$, esiste qualche $\epsilon_x > 0$ tale che $\mathcal{B}_{\epsilon_x}(x) \subseteq A$;
- una funzione $f : (X, d) \to (X', d')$ fra spazi pseudometrici è topologicamente continua se, per ogni $x \in X$ e ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_{x,\epsilon} > 0$ tale che $f(\mathcal{B}_{\delta_{x,\epsilon}}(x)) \subseteq \mathcal{B}_\epsilon(f(x))$, che è la versione standard della continuità utilizzata quando si lavora con i numeri reali.

Un modo alternativo (ma equivalente) per definire la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ (e, in generale, sulle sue potenze) è la seguente; per ogni $n \in \omega$, si definisca $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ come segue:

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

La funzione d_n è una metrica, e la topologia indotta su $\mathbb{R}^n$ da d_n è la topologia euclidea standard; in particolare, la topologia di $\mathbb{R}$ indotta dalla funzione

$$d_1(x, y) = |x - y|$$

è la stessa che avevamo precedentemente definito prendendo come sottobase l'insieme degli intervalli aperti (semi-illimitati).

Bibliografia

[Abr87] S. Abramsky. Domain theory and the logic of observable properties. Ph. D. thesis, Queen Mary College, Univ. of London, 1987.

[Arm39] W.E. Armstrong. The determinateness of the utility function. *Economics Journal*, 49:453–467, 1939.

[BB95] S. Basagni and P. Boldi. Causal equivalence and congruence between stable event structures. Technical report, no. RI-DSI-147-95, Università di Milano, Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Milano, 1995.

[BCS93] P. Boldi, F. Cardone, and N. Sabadini. Concurrent automata, prime event structures and universal domains. In M. Droste and Y. Gurevich, editors, *Semantics of Programming Languages and Model Theory*. Gordon & Breach Science Publications, 1993.

[Bed88] M.A. Bednarczyk. Categories of asynchronous systems. Ph.D. thesis, University of Sussex, Department of Computer Science, 1988.

[Ben91] J. Van Benthem. *The logic of time — A model-theoretic investigation into the varieties of temporal ontology and temporal discourse*. Synthese Library, Vol. 156. Kluwer Academic Publishers, 1991. Second Edition.

[Ber78] G. Berry. Stable models of typed λ-calculi. In *Proc.* 5^{th} *Coll. on Automata, Languages and Programming, LNCS 62*, pages 72–89. Springer-Verlag, 1978.

[Ber79] G. Berry. Modèles complètement adéquats et stables des lambda-calculs typés. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, Paris, 1979.

[BG92] S. Brookes and S. Geva. Stable and sequential functions on scott domains. Technical Report CMU-CS-92-121, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1992.

[BM76] J.L. Bell and M. Machover. *A course in mathematical logic*. North-Holland, 1976.

[Bog82] K.P. Bogart. Some social science applications of ordered sets. In I. Rival, editor, *Ordered Sets, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, pages 759–790. D. Reidel Publishing Company, 1982.

[Bol95] P. Boldi. Computability and complexity over the reals. NeuroCOLT project, ESPRIT Technical Report no. NC–TR–95–015, Royal Holloway University, London, 1995.

[Bol96] P. Boldi. Maximal chains and antichains in strongly noetherian semiorders. *Fundamenta Informaticae*, 1(27):59–80, 1996.

[Bor46] E. Borel. *Les Paradoxes de l'Infini.* Gallimard, 1946.

[Cam90] P. Cameron. *Oligomorphic Permutation Groups.* Cambridge University Press, 1990.

[Car58] R. Carnap. *Introduction to Symbolic Logic and its Applications.* Dover books on science. New York Dover Publications, Inc., 1958.

[Cau40] A. Cauchy. Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. *Comptes Rendus*, 11:789–798, 1840.

[Coq91] T. Coquand. Constructive topology and combinatorics. In *Constructivity in computer science, LNCS 613*, number 613 in Lecture Notes in Computer Science, pages 159–164. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[Coq92] T. Coquand. A constructive proof of Tychonoff's theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 57:28–32, 1992.

[Cur86] P.-L. Curien. *Categorical Combinators, Sequential Algorithms and Functional Programming.* Pitman, 1986.

[DG93] M. Droste and R. Göbel. Universal domains and the amalgamation property. *Mathematical Structures in Computer Science*, 3:137–159, 1993.

[Die90] V. Diekert. *Combinatorics on Traces, LNCS 454.* Springer-Verlag, 1990.

[Doo94] J.L. Doob. *Measure Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Sprinver-Verlag, 1994.

[DR95] V. Diekert and G. Rozenberg, editors. *The Book of Traces.* World Scientific, Singapore, 1995.

[Dro89] M. Droste. Event structures and domains. *Theoretical Computer Science*, 68:37–47, 1989.

[Dro90] M. Droste. Concurrency, automata and domains. In *17th International Colloquium on Automata, Languages and Programming , LNCS 443*, pages 195–208. Springer-Verlag, 1990.

[Dro91] M. Droste. Universal homogeneous event structures and domains. *Information and Computation*, 94:48–61, 1991.

[Dum75] M. Dummett. Wang's paradox. *Synthese*, 30:301–324, 1975. Reprinted in *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London, 1978, pp. 248–268.

[ER63] P. Erdős and A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 14:295–315, 1963.

[ES74] P. Erdős and J. Spencer. *Probabilistic methods in combinatorics.* Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, 1974.

[EZZ86] M.H. El-Zahar and N. Zaguia. Antichains and cutsets. In *Combinatorics and Ordered Sets*, Contemporary Mathematics 57, pages 227–261, 1986.

[Fis85] P.C. Fishburn. *Interval orders and interval graphs.* Series in Discrete Mathematics. Wiley-Interscience Publications, 1985.

[Gaa64] S.A. Gaal. *Point Set Topology.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1964.

[GH62] A. Ghouila-Houri. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 254:1370–1371, 1962.

[Gia93] P. Di Gianantonio. A functional approach to computability on real numbers. Ph.D. thesis (TD–6/93), Università di Pisa, Dipartimento di Informatica, Pisa, 1993.

[Gir86] J.-Y. Girard. The system F of variable types, fifteen years later. *Theoretical Computer Science*, 45:159–192, 1986.

[Gir87] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–43, 1987.

[GLT89] J.-Y. Girard, Y. Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Gol80] M.C. Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs.* Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1980.

[Goo77] N. Goodman. *The structure of appearance.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, third edition, 1977.

[Gri69] G.A. Grillet. Maximal chains and antichains. *Fundamenta Mathematicae*, 65:157–167, 1969.

[GS90] C.A. Gunter and D.S. Scott. Semantic domains. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B*, pages 633–674, Amsterdam, 1990. North Holland.

[Gun87] C. Gunter. Universal profinite domains. *Information and Computation*, 72:1–30, 1987.

[H$^+$68] A.W. Holt et al. Information system theory project. Technical report RADC–TR–68–305, Applied Data Research, Inc., 1968.

[Hol74a] A.W. Holt. Final Report for the project "Development of theoretical foundations for description and analysis of discrete information systems". Technical Report CADD–7405–2011, Massachusetts Computer Associates, Wakefield, Mass., 1974.

[Hol74b] A.W. Holt. First semi-annual Report for the project "Development of theoretical foundations for description and analysis of discrete information systems". Technical Report CADD–7406–0611, Massachusetts Computer Associates, Wakefield, Mass., 1974.

[Hol80] A.W. Holt. A mathematical model of continuous discrete behavior. Technical report, Massachusetts Computer Associates, Wakefield, Mass., 1980.

[Kal67] L. Kalmar. Value, synonymy, and translation. In *Symposium Mashperevod '67, Budapest*, 1967.

[Kat94] R.H. Katz. *Contemporary Logic Design*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1994.

[Kel55] J.L. Kelley. *General Topology*. American Book Company, New York, 1955.

[KKM90] E. Khalimsky, R. Kopperman, and P.R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36:1–17, 1990.

[KP78] G. Kahn and G. D. Plotkin. Domaines concrèts. Rapport 336, IRIA Laboria, 1978.

[Lam78] L. Lamport. Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system. *ACM Communications*, 21(7):558–565, 1978.

[LM73] B. Leclerc and B. Monjardet. Ordres C.A.C. *Fundamenta Mathematicae*, 79:11–22, 1973.

[Luc56] R.D. Luce. Semiorders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, 24:178–191, 1956.

[Mac71] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[Maz77] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. Technical Report DAIMI PB-78, Aarhus University, Aarhus, 1977.

[Men40] K. Menger. Topology without points. *Rice Institute Pamphlets*, 27:80–107, 1940.

[NPW81] M. Nielsen, G.D. Plotkin, and G. Winskel. Petri nets, event structures and domains, Part I. *Theoretical Computer Science*, 13:85–108, 1981.

[Par83] R. Parikh. The problem of vague predicates. In R.S.Cohen and M.W.Wartofsky, editors, *Language, logic and method*, pages 241–261. D.Reidel Publishing Company, 1983.

[Pat70] S. Patil. Coordination of asynchronous events. PhD Thesis 72, MIT, Project MAC, 1970.

[Pet62] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten.* PhD thesis, Universität Darmstadt, 1962. translated by Clifford F. Greene, Jr. as a Supplement to Technical Documentary Report #1, prepared for the Rome Air Development Center Contract #AF30(602)–3324, Summer 1965.

[Pet77] C.A. Petri. Non-sequential processes. Interner Bericht ISF-77-5, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1977.

[Pet79] C.A. Petri. Concurrency as a basis of system thinking. In F.V. Jensen, B.H. Mayoh, and K.K. Moller, editors, *Proc. of 5th Scandinavian Logic Symposium.* Aalborg University Press, 1979.

[Pet80a] C.A. Petri. Concurrency. In *Net theory and Applications: Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, LNCS 84*, pages 251–260. Springer-Verlag, 1980.

[Pet80b] C.A. Petri. General net theory. In *Net theory and Applications: Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, LNCS 84*, pages 1–19. Springer-Verlag, 1980.

[Pet82a] C.A. Petri. Fundamentals of the representation of discrete processes. ISF–Report 82.04, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1982. Translation, by H.J. Genrich and P.S. Thiagarajan of: *Grundsätzliches zur Beschreibung diskreter Prozesse*, in *3. Colloquium über Automatentheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1967.

[Pet82b] C.A. Petri. State transition structures in physics and computation. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(10/11), 1982.

[Pet87] C.A. Petri. Concurrency theory. In W. Brauer, W. Reisig, and G. Rozenberg, editors, *Advances in Petri Nets, LNCS 254*, pages 4–24. Springer-Verlag, 1987.

[Pet96] C.A. Petri. Nets, time and space. *Theoretical Computer Science*, 153:3–41, 1996.

[Plo78] G.D. Plotkin. $\mathbf{T}^\omega$ as a universal domain. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 17:209–236, 1978.

[Poi03] H. Poincaré. *La Science et l'hypothèse.* Flammarion, Paris, 1903. English translation as *Science and Hypothesis*, Dover, New York, 1952.

[Pos71] T. Poston. *Fuzzy Geometry.* PhD thesis, University of Warwick, 1971.

[PS87] C.A. Petri and E. Smith. Concurrency and continuity. In *Advances in Petri Nets 1987, LNCS 266*, pages 273–292. Springer-Verlag, 1987.

[Rad67] R. Rado. Universal graphs. In F. Harary, editor, *A Seminar on Graph Theory*, pages 83–85, New York, 1967. Holt, Rinehart and Winston.

[Riv86] I. Rival. Stories about order and the letter N. In *Combinatorics and ordered sets*, Contemporary Mathematics 57, pages 263–285, 1986.

[Rob79] F.S. Roberts. *Measurement theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 7. Addison-Wesley, 1979.

[RT91] B. Rozoy and P.S. Thiagarajan. Event structures and trace monoids. *Theoretical Computer Science*, 91:285–313, 1991.

[Rus37] B. Russell. *The Principles of Mathematics.* George Allen & Unwin Ltd., London, 1937.

[Sco70] D. Scott. Lattice theory, data types and semantics. In P. Rustin, editor, *Formal Semantics of Programming Languages*, pages 65–106, Englewood Cliffs, NJ, 1970. Prentice-Hall.

[Sco76] D. Scott. Data types as lattices. *SIAM Journal on Computing*, 5:522–587, 1976.

[Sco82] D. Scott. Domains for denotational semantics. In *Proc. 9th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, LNCS 140*, pages 577–613. Springer-Verlag, 1982.

[Sei80] C.L. Seitz. System timing. In C. Mead and L. Conway, editors, *Introduction to VLSI systems*, pages 218–262. Addison-Wesley, 1980.

[Shi82] M.W. Shields. Non-sequential behaviour: I. Technical Report CSR-120-82, University of Edinburgh, 1982.

[Shi85] M.W. Shields. Concurrent machines. *Computer Journal*, 28:449–465, 1985.

[Shr68a] Yu.A. Shreyder. A mathematical model of the theory of classification. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya, Series 2*, 10:7–14, 1968.

[Shr68b] Yu.A. Shreyder. On the question of the structure of scientific collectives. In *Questions in the theory and practice of informational and information-search systems.* Ukr. NIINTI, 1968.

[Shr71] Yu.A. Shreyder. Tolerance spaces. *Journal of Cybernetics*, 1(2):115–122, 1971.

[Smi93] E. Smith. Comparability orders and measurement. In *Advances in Petri Nets 1993, LNCS 674*, pages 371–405. Springer-Verlag, 1993.

[Smy92] M.B. Smyth. Topology. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science Volume 1*, pages 641–761. Oxford University Press, 1992.

[Smy95] M.B. Smyth. Semi-metrics, closure spaces and digital topology. *Theoretical computer science*, 151:257–276, 1995.

[SS58] D. Scott and P. Suppes. Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic*, 23:113–128, 1958.

[Sta89a] E.W. Stark. Compositional relational semantics for indeterminate dataflow networks. In *Category Theory and Computer Science, LNCS 389*, pages 52–74. Springer-Verlag, 1989.

[Sta89b] E.W. Stark. Connections between a concrete and an abstract model of concurrent systems. In *Mathematical Foundations of Programming Semantics, LNCS 442*, pages 53–79. Springer-Verlag, 1989.

[Sün95] P. Sünderhauf. A faithful computational model of the real numbers. *Theoretical Computer Science*, 151:277–294, 1995.

[Thi96a] H. Thiele. On isomorphisms between the De Morgan algebra of fuzzy tolerance relations and De Morgan algebras of fuzzy clusterings. In *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1996. To appear.

[Thi96b] H. Thiele. On mathematical foundations of fuzzy cluster analysis. *Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 1996. To appear.

[TS95] H. Thiele and N. Schmechel. On the mutual definability of fuzzy equivalence relations and fuzzy partitions. In *Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 3, pages 1383–1390, 1995.

[Wey49] H. Weyl. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press, 1949. Revised English edition.

[Wie14] N. Wiener. Contributions to the theory of relative position. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17:441–449, 1912–1914.

[Wie16] N. Wiener. A new theory of measurement: A study in the logic of mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 19:181–205, 1914–1916.

[Win80] G. Winskel. Events in computation. Ph.D. thesis, University of Edinburgh, Department of Computer Science, Edinburgh, 1980.

[Win87] G. Winskel. Event structures. In *Petri Nets: Applications and Relationships to other models of concurrency, LNCS 255*, pages 325–392. Springer-Verlag, 1987.

[Win91] G. Winskel. Categories of models for concurrency. Notes, Advanced school on the algebraic, logical, and categorical foundations of concurrency, Gargnano del Garda, 1991.

[Wri75] C. Wright. On the coherence of vague predicates. *Synthese*, 30:325–365, 1975.

[ZB70] E. Zeeman and O. Buneman. Tolerance spaces and the brain. In *On the Path to Theoretical Biology*, Moscow, 1970.

[Zee62] E.C. Zeeman. The topology of the brain and visual perception. In M.K. Fort, editor, *The topology of 3-Manifolds*, pages 240–256. Prentice Hall, Englewood Cliffs / NJ, 1962.